－ 中3C　宿題プリント(1学期-8)　解答－

宿題 8-1

三角形 ABC において、
$\cos A = \frac{3}{4}$, $\cos B = -\frac{9}{16}$ とする。

(1) $\sin A$, $\sin B$ の値を求めよ。

(2) $\sin(A+B)$ の値を求めよ。

(3) $\sin C$ の値を求めよ。

(4) BC:CA:AB をもっとも簡単な自然数の比で求めよ。

(1) A, B は三角形の内角であり、ともに $0°$ と $180°$ の間だから、$\sin A$, $\sin B$ は正である。

よって、

$$\sin A = \sqrt{1-(\cos A)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{4^2-3^2}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{7}}{4}}$$

$$\sin B = \sqrt{1-(\cos B)^2} = \sqrt{1-\left(-\frac{9}{16}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{16^2-9^2}}{16} = \frac{\sqrt{(16+9)(16-9)}}{16} = \boxed{\frac{5\sqrt{7}}{16}}$$

(2) 加法定理より

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A \sin B$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\left(-\frac{9}{16}\right) + \frac{3}{4}\cdot\frac{5\sqrt{7}}{16} = \boxed{\frac{3\sqrt{7}}{32}}$$

(3) 三角形の内角の和は $180°$ なので、$C = 180° - (A+B)$

よって、

$$\sin C = \sin(180° - (A+B))$$

$$= \sin(A+B) \quad (\text{補角公式より})$$

$$= \boxed{\frac{3\sqrt{7}}{32}} \quad (\text{(2) の結果より})$$

(4) 正弦定理より

$$\mathrm{BC} : \mathrm{CA} : \mathrm{AB} = \sin A : \sin B : \sin C$$

$$= \frac{\sqrt{7}}{4} : \frac{5\sqrt{7}}{16} : \frac{3\sqrt{7}}{32} = \boxed{8:10:3}$$

宿題 8-2

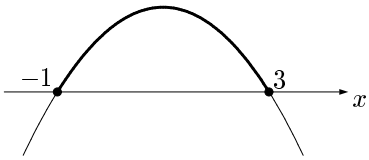
次の 2 次不等式を解け。

(1) $-x^2+2x+3 \geqq 0$

(2) $x^2-3x+3 \leqq 0$

(3) $x^2+4x-2 > 0$

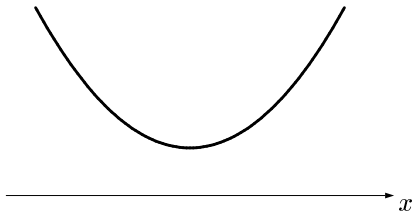
(1) $y = -x^2+2x+3 = -(x^2-2x-3) = -(x+1)(x-3)$
のグラフは下図のようである。
このグラフの $y \geqq 0$ の部分に注目して、
不等式 $-x^2+2x+3 \geqq 0$ の解は
$\boxed{-1 \leqq x \leqq 3}$



(2) $y = x^2-3x+3 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3$

$= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

のグラフは下図のよう。
このグラフの $y \leqq 0$ の部分は存在しないので、
不等式 $x^2-3x+3 \leqq 0$ は、$\boxed{\text{解なし}}$。



(3) $y = x^2+4x-2$ のグラフの x 切片は

$x^2+4x-2 = 0$

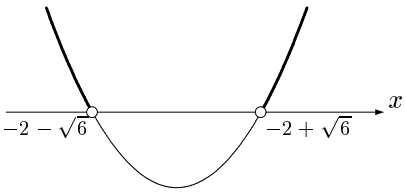
$(x+2)^2 - 2^2 - 2 = 0$

$(x+2)^2 = 6$

$x+2 = \pm\sqrt{6}$

$x = -2 \pm \sqrt{6}$ である。

したがって、$y = x^2+4x-2$ のグラフの概形は下図のよう。
このグラフの $y > 0$ の部分に注目して、
不等式 $x^2+4x-2 > 0$ の解は
$\boxed{x < -2-\sqrt{6},\ x > -2+\sqrt{6}}$



宿題 8-3

a を定数とする。2 次関数 $y = x^2 - ax + 2a$ について、以下の問に答えよ。

(1) この 2 次関数のグラフの頂点 A の座標を a を用いて表せ。

(2) x が実数全体を動くとき、y の最小値が 1 となる a の値を求めよ。

(3) x が実数全体を動くとき、y の最小値が 3 以下となる a の範囲を求めよ。

(1) $y = x^2 - ax + 2a = \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + 2a$ より

頂点の座標は $\boxed{\mathrm{A}\left(\dfrac{a}{2}, -\dfrac{a^2}{4} + 2a\right)}$

(2) $y = x^2 - ax + 2a$ のグラフは下に凸なので、x が実数全体を動くときの y の最小値は、頂点の y 座標。

最小値が 1 となるのは

$-\dfrac{a^2}{4} + 2a = 1$

$a^2 - 8a = -4$

$a^2 - 8a + 4 = 0$

$(a-4)^2 - 4^2 + 4 = 0$

$(a-4)^2 = 12$

$a - 4 = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$

$\boxed{a = 4 \pm 2\sqrt{3}}$

(3) 最小値が 3 以下となるのは

$-\dfrac{a^2}{4} + 2a \leqq 3$

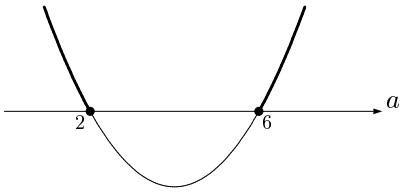
$-\dfrac{a^2}{4} + 2a - 3 \leqq 0$

$a^2 - 8a + 12 \geqq 0$

(両辺を -4 倍して、不等号の向きが逆転)

$(a-2)(a-6) \geqq 0$

$\boxed{a \leqq 2,\ a \geqq 6}$



宿題 8-4

袋の中に赤球、青球、黒球が 3 個ずつ、計 9 個入っている。袋の中から無作為に球を 1 個ずつ取り出し、取り出した球は戻さないとする。3 個の球を取り出したときの球の色の種類の数を X とする。

(1) 次の表を完成させよ。

X の値	1	2	3	計
その確率				

(2) X の期待値を求めよ。

(1) 9 個の球をすべて区別すると、3 個の球の取り出し方は $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ 通りあって、これらは等確率で起きるとみなせる。

3 個とも同じ色である取り出し方は $(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot 3 = 18$ 通りなので、

$X = 1$ となる確率は、$\dfrac{18}{504} = \dfrac{1}{28}$

2 個が同じ色で、残り 1 個が違う色である取り出し方は、2 個ある色の選び方が 3 通り、残り 1 個の色の選び方が 2 通り、同じ色の球 2 個の選び方が ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$ 通り、残り 1 個の球の選び方が 3 通りだから、3 個の球を取り出す順番も考えて、$X = 2$ となる確率は、

$\dfrac{(3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3) \cdot 3!}{504} = \dfrac{9}{14}$

3 個とも異なる色である取り出し方は、

$(3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot 3! = 162$ 通りなので、$X = 3$ となる確率は

$\dfrac{162}{504} = \dfrac{9}{28}$

X の値	1	2	3	計
その確率	$\dfrac{1}{28}$	$\dfrac{9}{14}$	$\dfrac{9}{28}$	1

(2) X の期待値は、

$1 \times \dfrac{1}{28} + 2 \times \dfrac{9}{14} + 3 \times \dfrac{9}{28} = \dfrac{1 + 36 + 27}{28}$

$= \dfrac{64}{28} = \boxed{\dfrac{16}{7}}$