

－ 中3C 宿題プリント(1学期-9) 解答－

宿題9-1

以下の問に答えよ。

(1) 次の値を求めよ。

ア) $\sin 60^\circ$ イ) $\cos 135^\circ$

(2) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の範囲で、次をみたす θ をすべて求めよ。

ア) $\sin \theta = \frac{1}{2}$ イ) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

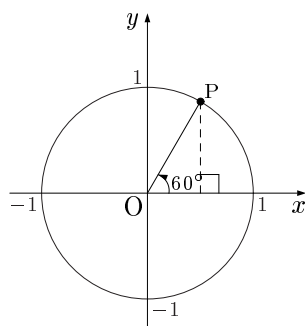
(3) θ が鈍角で、 $\sin \theta = \frac{2}{5}$ のとき、 $\cos \theta$ の値を求めよ。

(1)

ア)

右図で、
点 P の y 座標に
注目して、

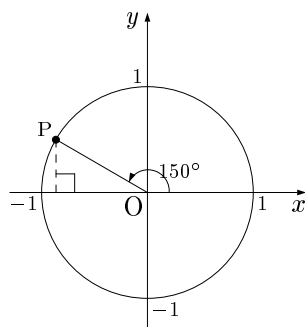
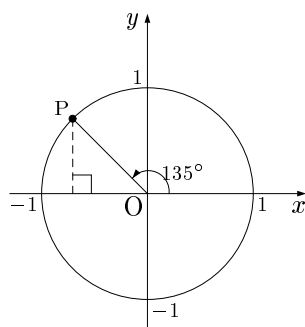
$$\sin 60^\circ = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$



イ)

右図で、
点 P の x 座標に
注目して

$$\cos 135^\circ = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

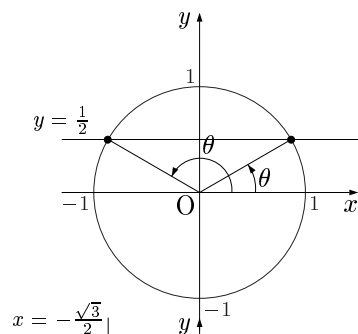


(2)

ア)

右図で、
 y 座標が $\frac{1}{2}$
である点に注目して、

$$\boxed{\theta = 30^\circ, 150^\circ}$$

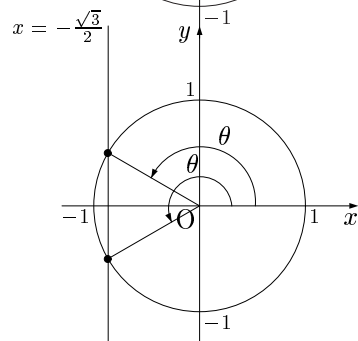


イ)

右図で、
 x 座標が $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
である点に注目して、

$$\boxed{\theta = 150^\circ}$$

($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より)



(3) $(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$ と $\sin \theta = \frac{2}{5}$ より、

$$(\cos \theta)^2 = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{5^2 - 2^2}{5^2} = \frac{21}{5^2}$$

θ が鈍角なので、 $\cos \theta < 0$ だから、

$$\cos \theta = \boxed{-\frac{\sqrt{21}}{5}}$$

宿題 9-2

三角形 ABC において、

$AB = 3$, $BC = 4\sqrt{5}$, $\theta = \angle BAC$ は鈍角、外接円の半径 R は 6 とする。

- (1) $\sin \theta$ の値を求めよ。
- (2) $\cos \theta$ の値を求めよ。
- (3) AC の長さを求めよ。
- (4) 三角形 ABC の面積 S を求めよ。

- (1) 正弦定理より、

$$\frac{BC}{\sin \theta} = 2R$$

$$\frac{4\sqrt{5}}{\sin \theta} = 2 \cdot 6$$

$$\sin \theta = \frac{4\sqrt{5}}{2 \cdot 6} = \boxed{\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

- (2) $(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$ と $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ より、

$$(\cos \theta)^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{9-5}{3^2} = \frac{4}{9}$$

θ が鈍角なので、 $\cos \theta < 0$ だから、

$$\cos \theta = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

- (3) $x = AC$ とおくと、(2) の結果と余弦定理より、

$$(4\sqrt{5})^2 = x^2 + 3^2 - 2 \cdot x \cdot 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$80 = x^2 + 9 + 4x$$

$$x^2 + 4x - 71 = 0$$

$$(x+2)^2 - 2^2 - 71 = 0$$

$$(x+2)^2 = 75$$

$$x+2 = \pm\sqrt{75} = \pm 5\sqrt{3}$$

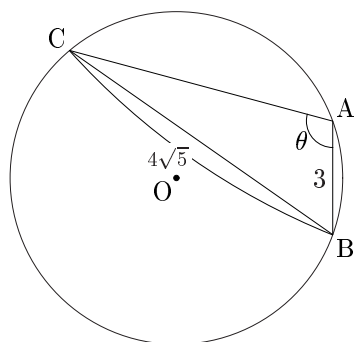
$$x = -2 \pm 5\sqrt{3}$$

$$x > 0 \text{ なので、} x = AC = \boxed{5\sqrt{3} - 2}$$

- (4) $S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \theta$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (5\sqrt{3} - 2) \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$= \boxed{\frac{5\sqrt{15} - 2\sqrt{5}}{2}}$$



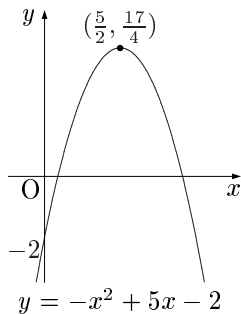
宿題 9-3

a を 1 以上の定数とする。2 次関数 $y = -x^2 + 5x - 2$ について、以下の間に答えよ。

- (1) この 2 次関数のグラフを描け。頂点の座標を明記すること。
- (2) $1 \leq x \leq a$ における y の最大値を a の値で場合分けして求めよ。
- (3) $1 \leq x \leq a$ における y の最小値を a の値で場合分けして求めよ。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad y &= -x^2 + 5x - 2 = -(x^2 - 5x) - 2 \\
 &= -\left\{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right\} - 2 \\
 &= -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} - 2 \\
 &= -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}
 \end{aligned}$$

と変形できるので、このグラフは、頂点が $\left(\frac{5}{2}, \frac{17}{4}\right)$ である、上に凸な放物線。



- (2) $1 \leq x \leq a$ の範囲よりも右側に頂点がある場合、 y は $x = a$ で最大となる。

$1 \leq x \leq a$ の範囲内に頂点がある場合、 y は頂点のところ ($x = \frac{5}{2}$) で最大となる。

したがって、

$$\begin{aligned}
 1 \leq a \leq \frac{5}{2} \text{ の場合、最大値は } -a^2 + 5a - 2 \quad (x = a) \\
 a \geq \frac{5}{2} \text{ の場合、最大値は } \frac{17}{4} \quad (x = \frac{5}{2})
 \end{aligned}$$

- (3) $x = 1$ のときと $x = t$ のときの y の値が等しいとすると、($t \neq 1$)

グラフが直線 $x = \frac{5}{2}$ について線対称だから、 $x = 1$ と $x = t$ の真ん中が $x = \frac{5}{2}$ である。

$$\frac{1+t}{2} = \frac{5}{2} \text{ より、} t = 4$$

つまり、 $x = 1$ と $x = 4$ のとき、 y の値は等しい。

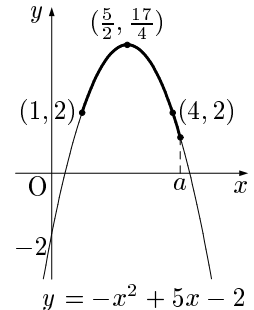
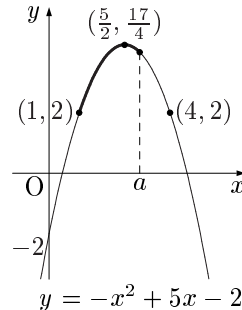
$1 \leq x \leq a$ の範囲よりも右側に $x = 4$ がある場合、 y は $x = 1$ で最小となる。

$1 \leq x \leq a$ の範囲内に $x = 4$ がある場合、 y は $x = a$ で最小となる。

したがって、

$$\begin{aligned}
 1 \leq a \leq 4 \text{ の場合、最小値は } 2 \quad (x = 1) \\
 a \geq 4 \text{ の場合、最小値は } -a^2 + 5a - 2 \quad (x = a)
 \end{aligned}$$

補足： $a = 4$ のときは、 $x = 1$ と $x = 4$ の両方で最小値 2 をとる。



宿題 9-4

a を定数とする。2 次関数 $y = x^2 + ax - 3$ について、以下の間に答えよ。

- (1) この 2 次関数のグラフの頂点 A の座標を a を用いて表せ。
- (2) 頂点 A が、 $1 \leq x \leq 3$ の範囲にあるような a の範囲を求めよ。
- (3) $1 \leq x \leq 3$ における y の最小値を a の値で場合分けして求めよ。

$$(1) \quad y = x^2 + ax - 3 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 3$$

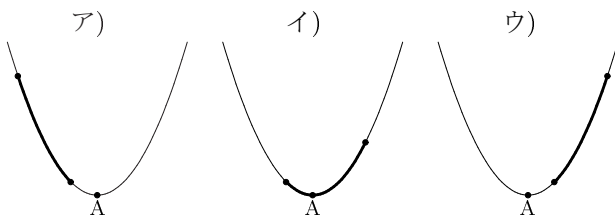
より、このグラフ頂点 A の座標は

$$A \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} - 3 \right)$$

- (2) 頂点 A が、 $1 \leq x \leq 3$ の範囲にあるのは、
 $1 \leq -\frac{a}{2} \leq 3$
 $-2 \geq a \geq -6$ (各辺に -2 をかけた)
 のとき。

求める a の範囲は、 $-6 \leq a \leq -2$

- (3) $1 \leq x \leq 3$ という範囲とグラフの頂点 A の位置関係で、
 以下のように 3 通りに分類して考える。



ア) となるのは、 $3 < -\frac{a}{2}$ のとき、すなわち $a < -6$ のとき。

このとき y は $x = 3$ で最小となり、
 最小値は $3^2 + a \cdot 3 - 3 = 3a + 6$

イ) となるのは、(2) より、 $-6 \leq a \leq -2$ のとき。
 このとき y は頂点、すなわち $x = -\frac{a}{2}$ で最小となり、

最小値は $-\frac{a^2}{4} - 3$

ウ) となるのは、 $-\frac{a}{2} < 1$ のとき、すなわち $a > -2$ のとき。

このとき y は $x = 1$ で最小となり、
 最小値は $1^2 + a \cdot 1 - 3 = a - 2$

以上をまとめると、

$$(y \text{ の最小値}) = \begin{cases} 3a + 6 & (a < -6) \\ -\frac{a^2}{4} - 3 & (-6 \leq a \leq -2) \\ a - 2 & (a > -2) \end{cases}$$

<注> 等号は $a \leq -6$, $a \geq -2$ のようにつけても良い。

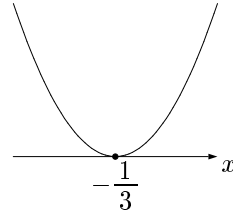
宿題 9-5

次の 2 次不等式を解け。

- (1) $9x^2 + 6x + 1 \leq 0$
- (2) $-x^2 + 2x + 2 \geq 0$
- (3) $x^2 + x + 3 > 0$

$$(1) \quad y = 9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2 = 9 \left(x + \frac{1}{3}\right)^2$$

のグラフの $y \leq 0$ の部分に注目して、
 2 次不等式 $9x^2 + 6x + 1 \leq 0$ の解は、 $x = -\frac{1}{3}$



$$(2) \quad y = -x^2 + 2x + 2 \text{ のグラフの } x \text{ 切片は}$$

$$-x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$(x - 1)^2 - 1^2 - 2 = 0$$

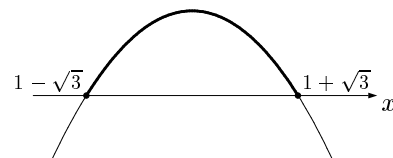
$$(x - 1)^2 = 3$$

$$x - 1 = \pm\sqrt{3}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{3}$$

したがって、 $y = -x^2 + 2x + 2$ のグラフは下図のようであり、このグラフの $y \geq 0$ の部分に注目して
 2 次不等式 $-x^2 + 2x + 2 \geq 0$ の解は

$$1 - \sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{3}$$



$$(3) \quad x^2 + x + 3 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} = 0$$

を満たす実数 x がないので、 $y = x^2 + x + 3$ のグラフは、 x 切片を持たない。

したがって、 $y = x^2 + x + 3$ のグラフは、下図のようであり、このグラフの $y > 0$ の部分に注目して

2 次不等式 $x^2 + x + 3 > 0$ の解は、**全実数**

