－ 中3C　宿題プリント(1学期-10)　解答－

宿題 10-1

以下の問に答えよ。

(1) x の 2 次関数 $y = x^2 - 4ax + a + 1$ の最小値が -2 となるような定数 a の値をすべて求めよ。

(2) x の 2 次関数 $y = bx^2 + 2bx - b^2 + 5b$ の最大値が -5 となるような定数 b の値をすべて求めよ。

(1) $y = x^2 - 4ax + a + 1$

$= (x - 2a)^2 - (2a)^2 + a + 1$

$= (x - 2a)^2 - 4a^2 + a + 1$

より、最小値は $-4a^2 + a + 1$

これが -2 となるのは

$-4a^2 + a + 1 = -2$

$4a^2 - a - 3 = 0$

$(4a + 3)(a - 1) = 0$

$\boxed{a = -\dfrac{3}{4}, 1}$

(2) $y = bx^2 + 2bx - b^2 + 5b \ \cdots$ ①

$= b\left(x^2 + 2x\right) - b^2 + 5b$

$= b\left((x+1)^2 - 1^2\right) - b^2 + 5b$

$= b\left(x+1\right)^2 - b - b^2 + 5b$

$= b\left(x+1\right)^2 - b^2 + 4b$

より、① のグラフの頂点の座標は $(-1, -b^2 + 4b)$。

最大値が -5 となるのは、① のグラフが上に凸な放物線で、頂点の y 座標が -5 のとき。
すなわち、$b < 0$ かつ $-b^2 + 4b = -5$ のとき。

$-b^2 + 4b = -5$ を解くと、

$b^2 - 4b - 5 = 0$

$(b+1)(b-5) = 0$

$b = -1, 5$

$b < 0$ とあわせて、$\boxed{b = -1}$

宿題 10-2

a を定数とする。
x の 2 次関数 $y = -2x^2 + ax + 3a + 1$ の $-1 \leqq x \leqq 2$ における最大値を a の値で場合分けして答えよ。

$y = -2x^2 + ax + 3a + 1$

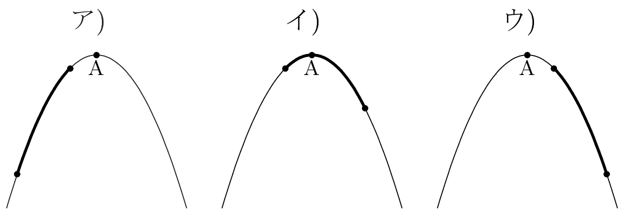
$= -2\left(x^2 - \dfrac{a}{2}x\right) + 3a + 1$

$= -2\left\{\left(x - \dfrac{a}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{4}\right)^2\right\} + 3a + 1$

$= -2\left(x - \dfrac{a}{4}\right)^2 + \dfrac{a^2}{8} + 3a + 1$

より、このグラフの頂点は $\mathrm{A}\left(\dfrac{a}{4}, \dfrac{a^2}{8} + 3a + 1\right)$ である。

頂点 A と $-1 \leqq x \leqq 2$ という範囲の位置関係で、以下のように 3 通りに分類して考える。



ア) となるのは、$\dfrac{a}{4} > 2$ すなわち、$a > 8$ のとき。
このとき、y は $x = 2$ で最大値 $-2\cdot 2^2 + a\cdot 2 + 3a + 1 = 5a - 7$ をとる。

イ) となるのは、$-1 \leqq \dfrac{a}{4} \leqq 2$ すなわち、$-4 \leqq a \leqq 8$ のとき。このとき、y は $x = \dfrac{a}{4}$ で最大値 $\dfrac{a^2}{8} + 3a + 1$ をとる。

ウ) となるのは、$\dfrac{a}{4} < -1$ すなわち、$a < -4$ のとき。
このとき、y は $x = -1$ で
最大値 $-2\cdot(-1)^2 + a\cdot(-1) + 3a + 1 = 2a - 1$ をとる。

以上をまとめると、

$$\boxed{(y\text{ の最大値}) = \begin{cases} 5a - 7 & (a > 8) \\ \dfrac{a^2}{8} + 3a + 1 & (-4 \leqq a \leqq 8) \\ 2a - 1 & (a < -4) \end{cases}}$$

＜注＞ 等号は $a \geqq 8,\ a \leqq -4$ のようにつけても良い。

宿題 10-3

三角形 ABC において、

$\dfrac{8}{\sin A} = \dfrac{7}{\sin B} = \dfrac{5}{\sin C}$ $\cdots$①

だとする。以下の問に答えよ。

(1) 3 辺の長さの比 AB : BC : CA を求めよ。

(2) 角の大きさ B を求めよ。

(1) 正弦定理より、

$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A} = \dfrac{\mathrm{CA}}{\sin B} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C}$ が成立する。

これと問題文の ① より、

$\mathrm{BC} : \mathrm{CA} : \mathrm{AB} = 8 : 7 : 5$

$\boxed{\mathrm{AB} : \mathrm{BC} : \mathrm{CA} = 5 : 8 : 7}$

(2) 相似拡大しても角の大きさは変わらないので、

$\mathrm{AB} = 5,\ \mathrm{BC} = 8,\ \mathrm{CA} = 7$ と考えて良い。

余弦定理を用いると

$\mathrm{CA}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} \cdot \cos B$

$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos B$

$$\cos B = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{25 + (8+7)(8-7)}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{40}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2}$$

$0^\circ < B < 180^\circ$ より、$\boxed{B = 60^\circ}$

宿題 10-4

t を $0 < t < 2$ をみたす定数とする。

1 辺の長さが 2 である正四面体 ABCD の辺 AC 上に $\mathrm{CP} = t$ をみたすように点 P を、辺 AD 上に $\mathrm{AQ} = t$ をみたすように点 Q をとる。

以下の問に答えよ。

(1) 線分 BP の長さを t を用いて表せ。

(2) 線分 PQ の長さを t を用いて表せ。

(3) 線分 QB の長さを t を用いて表せ。

(4) 三角形 BPQ の周の長さを L とおく。
t が $0 < t < 2$ の範囲を変化するときの、L の最小値を求めよ。

(1) $\triangle$BPC に余弦定理を用いて

$\mathrm{BP}^2 = 2^2 + t^2 - 2 \cdot 2 \cdot t \cdot \cos 60^\circ = t^2 - 2t + 4$

$\therefore\ \mathrm{BP} = \boxed{\sqrt{t^2 - 2t + 4}}$

(2) $\triangle$APQ に余弦定理を用いて

$\mathrm{PQ}^2 = t^2 + (2-t)^2 - 2 \cdot t \cdot (2-t) \cdot \cos 60^\circ = 3t^2 - 6t + 4$

$\therefore\ \mathrm{PQ} = \boxed{\sqrt{3t^2 - 6t + 4}}$

(3) $\triangle\mathrm{BQA} \equiv \triangle\mathrm{BPC}$ なので、

$\mathrm{QB} = \mathrm{PB} = \boxed{\sqrt{t^2 - 2t + 4}}$

(4)
$$\begin{aligned} L &= \mathrm{BP} + \mathrm{PQ} + \mathrm{QB} \\ &= \sqrt{t^2 - 2t + 4} + \sqrt{3t^2 - 6t + 4} + \sqrt{t^2 - 2t + 4} \\ &= 2\sqrt{t^2 - 2t + 4} + \sqrt{3t^2 - 6t + 4} \\ &= \underbrace{2\sqrt{(t-1)^2 + 3}}_{\text{ア}} + \underbrace{\sqrt{3(t-1)^2 + 1}}_{\text{イ}} \end{aligned}$$

と表せる。

t が $0 < t < 2$ の範囲を変化するとき、アとイはともに $t = 1$ で最小となるので、L も $t = 1$ で最小となる。

よって、求める最小値は、$\boxed{2\sqrt{3} + 1}$