

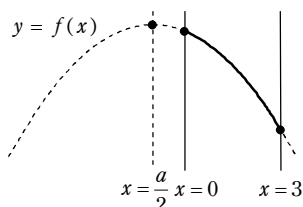
中3数学D 宿題解答 1学期-8

宿題 8-1

$$\begin{aligned}
 (1) \quad y &= f(x) = -x^2 + ax \\
 &= -(x^2 - ax) \\
 &= -\left\{ \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} \right\} \\
 &= -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4}
 \end{aligned}$$

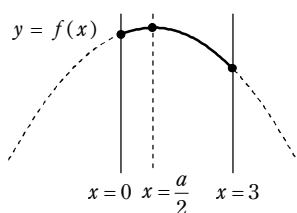
なので、頂点の座標は $\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}\right)$.

(2) あ) $\frac{a}{2} \leq 0 \quad \therefore a \leq 0$ のとき



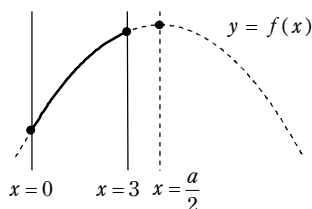
グラフより、 $M(a) = f(0) = 0$.

い) $0 \leq \frac{a}{2} \leq 3 \quad \therefore 0 \leq a \leq 6$ のとき



グラフより、 $M(a) = f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}$.

う) $3 \leq \frac{a}{2} \quad \therefore 6 \leq a$ のとき



グラフより、 $M(a) = f(3) = -9 + 3a$.

以上より、最大値は

$$M(a) = \begin{cases} 0 & (a \leq 0) \\ \frac{a^2}{4} & (0 \leq a \leq 6) \\ 3a - 9 & (6 \leq a) \end{cases}$$

宿題 8-2

$$\begin{aligned}
 (1) \quad y &= f(x) = ax^2 - 4x + 3a \\
 &= a\left(x^2 - \frac{4}{a}x\right) + 3a \\
 &= a\left\{\left(x - \frac{2}{a}\right)^2 - \frac{4}{a^2}\right\} + 3a \\
 &= a\left(x - \frac{2}{a}\right)^2 - \frac{4}{a} + 3a
 \end{aligned}$$

なので、頂点の座標は $\left(\frac{2}{a}, -\frac{4}{a} + 3a\right)$.

(2) $f(x)$ の最大値が 1 となるのは、 $y = f(x)$ のグラフが

上に凸な放物線で、頂点の y 座標が 1 すなわち、

$$\begin{cases} a < 0 & \text{..... ①} \\ -\frac{4}{a} + 3a = 1 & \text{..... ②} \end{cases}$$

のときである。

②を解くと、

$$-4 + 3a^2 = a$$

$$3a^2 - a - 4 = 0$$

$$(a+1)(3a-4) = 0$$

$$\therefore a = -1, \frac{4}{3}$$

このうち、①を満たすのは、 $a = -1$.

宿題 8-3

- (1) C と l の交点 A, B の x 座標は,

$$\frac{1}{2}x^2 = -x + 4$$

の解. これを解くと,

$$\frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0$$

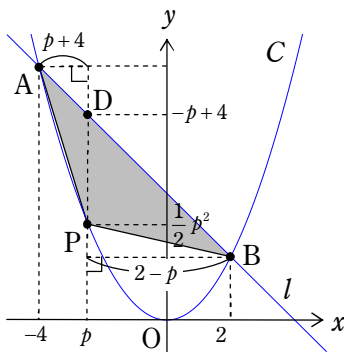
$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x+4)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -4, 2$$

よって, $A(-4, 8), B(2, 2)$ であり, p の取

りうる範囲は, $\boxed{-4 < p < 2}$.



- (2) P を通り y 軸に平行な直線と l の交点を D とすると, $D(p, -p+4)$ であり,

$$PD = -p + 4 - \frac{1}{2}p^2$$

三角形 PAB を三角形 PAD と PBD に分割して, それぞれの面積を, PD を底辺として計算すると,

$$S = \frac{1}{2} \times (2-p) \times PD + \frac{1}{2} \times (p+4) \times PD$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times PD$$

$$= 3 \left(-p + 4 - \frac{1}{2}p^2 \right)$$

$$= \boxed{-\frac{3}{2}p^2 - 3p + 12}$$

- (3) $-4 < p < 2$ における

$$f(p) = -\frac{3}{2}p^2 - 3p + 12$$

の最大値を求めたい.

$$f(p) = -\frac{3}{2}(p^2 + 2p) + 12$$

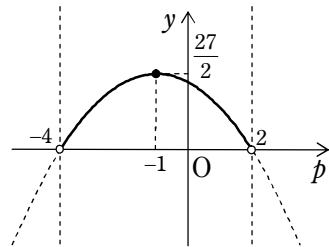
$$= -\frac{3}{2}\{(p+1)^2 - 1\} + 12$$

$$= -\frac{3}{2}(p+1)^2 + \frac{3}{2} + 12$$

$$= -\frac{3}{2}(p+1)^2 + \frac{27}{2}$$

なので, $y = f(p)$ のグラフは上に凸な放

物線で, 頂点の座標は $\left(-1, \frac{27}{2}\right)$.



グラフより, $f(p) = S$ の最大値は,

$$p = \boxed{-1} \text{ のときの } \boxed{\frac{27}{2}}$$

- ※ 三角形 PAB の面積を表す式である

$$f(p) = -\frac{3}{2}p^2 - 3p + 12$$

は, 意味を考えれば, $p = -4, 2$ のときに 0 になっていることが納得できます.

したがって, $y = f(p)$ のグラフは上に凸な放物線で, p 切片は $-4, 2$ となるので, 頂点の p 座標は

$$p = \frac{-4+2}{2} = -1$$

で, y 座標は

$$f(p) = -\frac{3}{2} \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 12 = \frac{27}{2}$$

と計算することもできます,

- (4) $p = -1$ のとき, $P\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ であり, l と平行な直線の傾きは -1 なので, m の式は

$$y = -(x+1) + \frac{1}{2} \quad \therefore y = -x - \frac{1}{2}$$

C と m の交点の x 座標は,

$$\frac{1}{2}x^2 = -x - \frac{1}{2}$$

の解であるから, これを解くと

$$\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

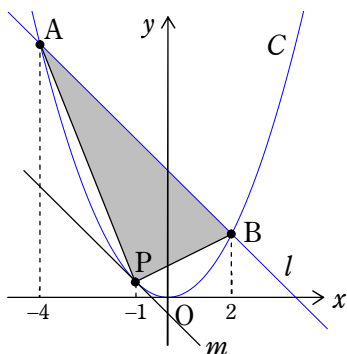
$$(x+1)^2 = 0$$

$$\therefore x = -1$$

したがって, 交点は $P\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ のみであり,

m と C は P で接している.

※ m と C が P で接するのは当然ですね!



宿題 8-4

(1) $xyz = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$

を満たす自然数の組 (x, y, z) は, 2, 3, 5, 7, 11 がそれぞれ x, y, z のうちのどれの約数になるかを決めれば決まるので, その総数は

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = \boxed{243}$$

- (2) (1) の 243 個のうち, x, y, z のうちどれか 2 つが一致しているものは,

$$(1, 1, 2310), (1, 2310, 1), (2310, 1, 1)$$

の 3 個であり, 残りの 240 個については, x, y, z は異なる 3 数となっている.

$$(1, 1, 2310), (1, 2310, 1), (2310, 1, 1)$$

の 3 個の中では, $x \leq y \leq z$ を満たすものは, $(1, 1, 2310)$ の 1 個.

残りの 240 個は異なる 3 数の組なので, $x \leq y \leq z$ (したがって $x < y < z$) を満たす組 1 つにつき, その並べ替えとなっているものが (元のものも含めて) 6 個含まれている.

例: $(2, 3, 385)$ に対して, その並べ替えとなっているものが,

$$(2, 3, 385), (2, 385, 3), (3, 2, 385),$$

$$(3, 385, 2), (385, 2, 3), (385, 3, 2)$$

の 6 個含まれている.

したがって, 「残りの 240 個」のうち,

$$x \leq y \leq z \text{ を満たすものは, } \frac{240}{6} = 40 \text{ 個.}$$

よって, 求める総数は $1 + 40 = \boxed{41}$ 個.

宿題 8-5

(1) 三角形 ABC において、余弦定理より、

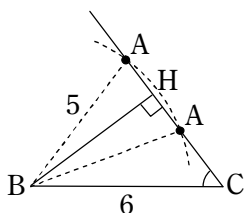
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos B$$

$$= 5^2 + 6^2 - 2 \times 5 \times 6 \times \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= 25 + 36 + 20 = 81$$

$$\therefore AC = \boxed{9} (> 0)$$

(2) 二辺と、その間にない角が定まっているだけなので、三角形 ABC は一通りに定まるとは言えない。BC の長さとも C の大きさは決まっているので、B から直線 AC に下した垂線の足を H とすると、



$$CH = 6 \cos C = 6 \times \frac{3}{5} = \frac{18}{5}$$

$$BH = 6 \sin C$$

ここで、

$$\sin^2 C = 1 - \cos^2 C = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\therefore \sin C = \frac{4}{5} (> 0)$$

なので、

$$BH = 6 \times \frac{4}{5} = \frac{24}{5}$$

すると、AB = 5 となる A に対して、ピタゴラスの定理より、

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = 5^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2 = \frac{49}{25}$$

$$\therefore AH = \frac{7}{5} (> 0)$$

であるから、

$$AC = CH \pm AH = \frac{18}{5} \pm \frac{7}{5} = \boxed{5, \frac{11}{5}}$$

[余弦定理を用いる別解法]

AC = x とおくと、三角形 ABC において、余弦定理より、

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \times AC \times BC} \\ &= \frac{x^2 + 6^2 - 5^2}{2 \times x \times 6} = \frac{x^2 + 11}{12x} \end{aligned}$$

となるが、 $\cos C = \frac{3}{5}$ なので、

$$\frac{3}{5} = \frac{x^2 + 11}{12x}$$

が成り立つ。この方程式を解くと、

$$36x = 5x^2 + 55$$

$$5x^2 - 36x + 55 = 0$$

$$(x - 5)(5x - 11) = 0$$

$$\therefore x = 5, \frac{11}{5}$$

$$\text{よって、} AC = \boxed{5, \frac{11}{5}}$$