中3数学D 宿題解答 1学期-9

宿題 9-1

$y = f(x)$

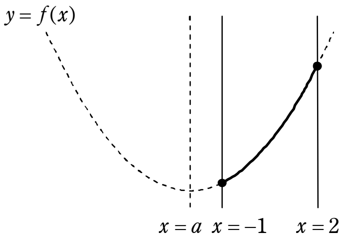
$= x^2 - 2ax - 1$

$= (x-a)^2 - a^2 - 1$

の頂点の座標は$(a, -a^2 - 1)$.

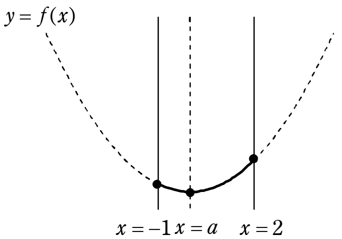
(1) $-1 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最小値 $m(a)$

あ） $a \leqq -1$ のとき



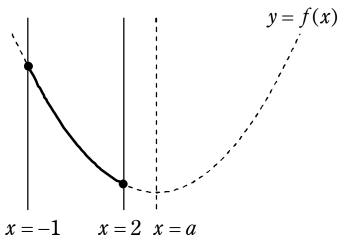
グラフより， $m(a) = f(-1) = 2a$.

い） $-1 \leqq a \leqq 2$ のとき



グラフより， $m(a) = f(a) = -a^2 - 1$.

う） $2 \leqq a$ のとき



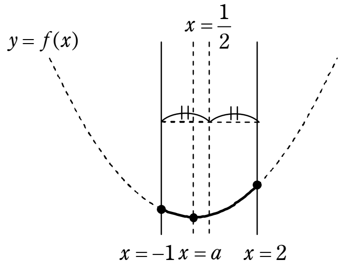
グラフより， $m(a) = f(2) = -4a + 3$.

以上より，

$$\boxed{m(a) = \begin{cases} 2a & (\quad a \leqq -1) \\ -a^2 - 1 & (-1 \leqq a \leqq 2) \\ -4a + 3 & (\ 2 \leqq a \quad) \end{cases}}$$

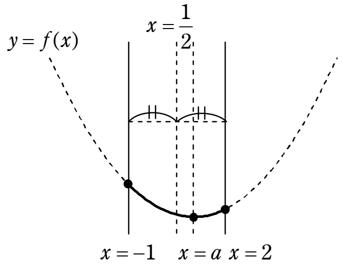
(2) $-1 \leqq x \leqq 2$ における $f(x)$ の最大値 $M(a)$

あ） $a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき



グラフより， $M(a) = f(2) = -4a + 3$.

い） $a \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき



グラフより， $M(a) = f(-1) = 2a$.

以上より，

$$\boxed{M(a) = \begin{cases} -4a + 3 & \left(\quad a \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ 2a & \left(\dfrac{1}{2} \leqq a \quad\right) \end{cases}}$$

(3) $b=m(a), b=M(a)$ のグラフに現れる図形は,

直線 $b=2a$ ……………………………… ①

放物線 $b=-a^2-1$ ……………………… ②

直線 $b=-4a+3$ ………………………… ③

である.

①と②の交点の a 座標は

$2a=-a^2-1$

$(a+1)^2=0$

$\therefore a=-1$

なので, 直線①と放物線②は点 $(-1,-2)$ で接している.

②と③の交点の a 座標は

$-a^2-1=-4a+3$

$0=(a-2)^2$

$\therefore a=2$

なので, 放物線②と直線③は点 $(2,-5)$ で接している.

①と③の交点の a 座標は

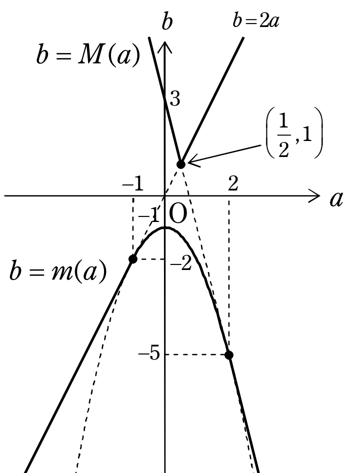
$2a=-4a+3$

$6a=3$

$\therefore a=\dfrac{1}{2}$

なので, 直線①と③は点 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ で交わる.

以上を踏まえてグラフを描くと, 下図太線部分が $b=m(a), b=M(a)$ のグラフとなる.



宿題 9-2a

直線 $y=-2tx+t^2-1$ 上の, x 座標 a の点 P の座標は

$(a, t^2-2at-1)$

である.

t が $-1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき, P の y 座標 $t^2-2at-1$ の動く範囲は, 宿題 9-1 で求めた最小値 $m(a)$, 最大値 $M(a)$ を用いて,

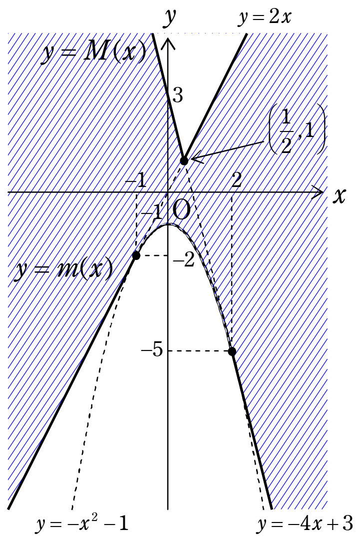
$m(a) \leqq y \leqq M(a)$

と表される.

したがって, 求める直線の通過範囲 W のうち, x 座標 a となる部分 W_a は

$x=a,\ m(a) \leqq y \leqq M(a)$

で表される線分となる. 宿題 9-1 (3)で描いた $b=m(a), b=M(a)$ のグラフを利用して, 求める直線の通過範囲は, 下図斜線部分（境界を含む）である.

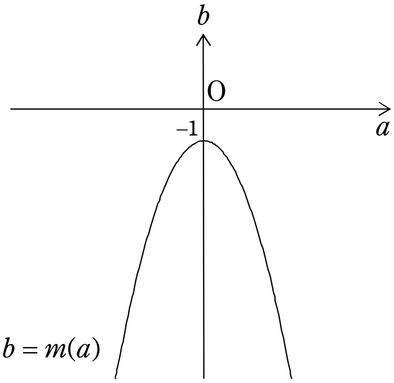


宿題 9-2b

(1) $y=f(x)$
$=x^2-2ax-1$
$=(x-a)^2-a^2-1$

のグラフは下に凸な放物線で，頂点の座標は$(a,-a^2-1)$なので，$\boxed{m(a)=-a^2-1}$.

$b=m(a)$のグラフは,



(2) 直線$y=-2tx+t^2-1$上の，x座標aの点Pの座標は$(a,t^2-2at-1)$である.

tが実数全体を動くとき，Pのy座標$t^2-2at-1$の動く範囲は，(1)より，

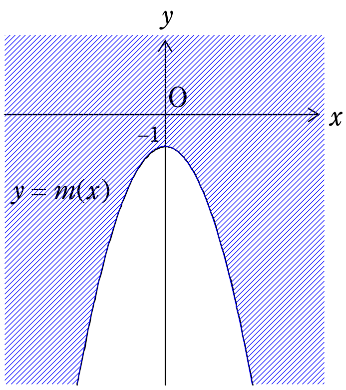
$m(a)\leqq y$

である.

したがって,求める直線の通過範囲Wのうち，x座標aとなる部分W_aは

$x=a,\ m(a)\leqq y$

で表される半直線となる．(1)で描いた$b=m(a)$のグラフを利用して，求める直線の通過範囲は，下図斜線部（境界を含む）である.



宿題 9-3

(1)

(i) 2回目，3回目には1回目と同じ色紙をもらう，という確率に他ならないので,

$$p_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\boxed{\frac{1}{9}}$$

(ii) 2回目には1回目とは異なる色紙を，3回目には1回目，2回目とは異なる色紙をもらう，という確率に他ならないので,

$$p_3=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\boxed{\frac{2}{9}}$$

(iii) $$p_2=1-(p_1+p_3)=\boxed{\frac{2}{3}}$$

これらの確率は，3週目についても，4週目についても同様である.

(2) 2, 3, 4週目のすべてにおいて3種類の色紙がもらえる確率なので,

$$p_3\times p_3\times p_3=\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}=\boxed{\frac{8}{729}}$$

(3) ちょうど4種類の色紙しかもらえないのは，2, 3, 4週目にそれぞれ

1, 1, 2種類
1, 2, 1種類
2, 1, 1種類

の色紙をもらう場合である．いずれの場合も，確率は

$$p_1\times p_1\times p_2=\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{243}$$

なので，求める確率は$\frac{2}{243}\times 3=\boxed{\frac{2}{81}}$

(4) ちょうど 6 種類の色紙をもらえるのは，

1, 2, 3 種類の色紙をもらった週が

1 回ずつある場合

と，

毎週 2 種類ずつの色紙をもらう場合

である．

前者の場合，何週目に何種類の色紙をもらったかは$3\times2\times1=6$通りあり，いずれのもらい方も，確率は

$$p_1\times p_2\times p_3=\frac{1}{9}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{9}=\frac{4}{243}$$

なので，確率は

$$\frac{4}{243}\times6=\frac{8}{81}$$

後者の場合の確率は

$$p_2\times p_2\times p_2=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$$

したがって，求める確率は

$$\frac{8}{81}+\frac{8}{27}=\boxed{\frac{32}{81}}$$

➢ なお，もらえる色紙の種類の数ごとの確率は

種類	確率
3	$\frac{1}{729}\approx0.14\%$
4	$\frac{2}{81}\approx2.47\%$
5	$\frac{38}{243}\approx15.64\%$
6	$\frac{32}{81}\approx39.51\%$
7	$\frac{76}{243}\approx31.28\%$
8	$\frac{8}{81}\approx9.88\%$
9	$\frac{8}{729}\approx1.10\%$

（確率は小数第 3 位を四捨五入）であり，もらえる色紙の種類の数の期待値は$\dfrac{19}{3}$である．

宿題 9-4

$\mathrm{AC}=x$ とおく．

三角形 ABC において，余弦定理より

$$\cos(\angle\mathrm{ABC})=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{AC}^2}{2\times\mathrm{AB}\times\mathrm{BC}}=\frac{3^2+4^2-x^2}{2\times3\times4}=\frac{25-x^2}{24}$$

三角形 CDA において，余弦定理より

$$\cos(\angle\mathrm{CDA})=\frac{\mathrm{CD}^2+\mathrm{DA}^2-\mathrm{AC}^2}{2\times\mathrm{CD}\times\mathrm{DA}}=\frac{5^2+6^2-x^2}{2\times5\times6}=\frac{61-x^2}{60}$$

ここで，四角形 ABCD は円に内接するので，

$$\angle\mathrm{ABC}+\angle\mathrm{CDA}=180^\circ$$

であるから，

$$\cos(\angle\mathrm{ABC})=-\cos(\angle\mathrm{CDA})$$

が成り立つ．よって，

$$\frac{25-x^2}{24}=-\frac{61-x^2}{60}$$

$$125-5x^2=-122+2x^2$$

$$247=7x^2$$

$$x^2=\frac{247}{7}$$

$$\therefore\ x=\sqrt{\frac{247}{7}}=\boxed{\frac{\sqrt{1729}}{7}}\ (>0)$$