

中3数学D 宿題解答 1学期-11

宿題 11-1

$f(x) = x^2 - ax + 2a + 5$ とおく.

$$f(x) = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 2a + 5$$

より, $y = f(x)$ のグラフは下に凸な放物線であり, 頂点の座標は $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + 2a + 5\right)$ である.

- (1) $f(x) = 0$ が $0 \leq x \leq 6$ の範囲に異なる 2 解をもつのは, $y = f(x)$ のグラフが x 軸の $0 \leq x \leq 6$ の部分と異なる 2 点で交わる時である.

$y = f(x)$ のグラフの頂点の x 座標は $\frac{a}{2}$ であるから, グラフが x 軸と異なる 2 点で交わる時, それらは x 軸の $x < \frac{a}{2}$ と

$x > \frac{a}{2}$ の部分に 1 つずつ現れるため,

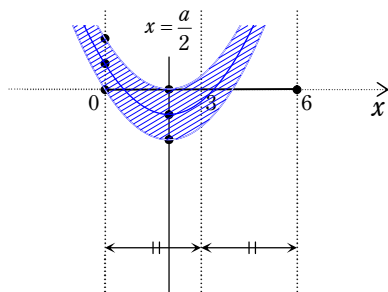
$\frac{a}{2} \leq 0$ および $\frac{a}{2} \geq 6$ の場合は条件を満たさない. したがって, 以下

$$0 < \frac{a}{2} < 6$$

の範囲で考える.

条件を満たすのは, 頂点の y 座標が負であり, かつ「 $x = 0, x = 6$ のうち, 対称軸から近い方でのグラフの y 座標が 0 以上」のときであるから, 次のように場合分けできる.

あ) $0 < \frac{a}{2} \leq 3 \quad \therefore 0 < a \leq 6$ の場合



条件を満たすのは, グラフが図の斜線部 (境界は下側を含み上側を含まない) に含まれるときであり,

$$\begin{cases} f\left(\frac{a}{2}\right) < 0 \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \dots\dots\dots ①$$

を満たすときである.

$f\left(\frac{a}{2}\right) < 0$ を解くと,

$$-\frac{a^2}{4} + 2a + 5 < 0$$

$$(a+2)(a-10) > 0$$

$$\therefore a < -2, 10 < a$$

$f(0) \geq 0$ を解くと,

$$2a + 5 \geq 0 \quad \therefore a \geq -\frac{5}{2}$$

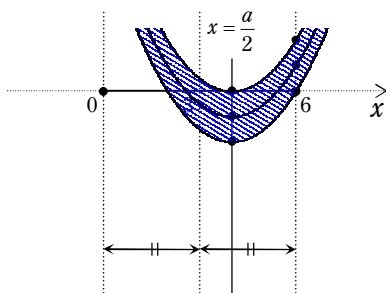
であるから, ①の解は

$$\begin{cases} a < -2 \text{ または } 10 < a \\ a \geq -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\therefore -\frac{5}{2} \leq a < -2 \text{ または } 10 < a$$

よって, あ) を満たす a は存在しない.

い) $3 \leq \frac{a}{2} < 6 \quad \therefore 6 \leq a < 12$ の場合



条件を満たすのは、グラフが図の斜線部
(境界は下側を含み上側を含まない) に
含まれるときであり、

$$\begin{cases} f\left(\frac{a}{2}\right) < 0 \\ f(6) \geq 0 \end{cases} \dots\dots\dots ②$$

を満たすときである。

$f(6) \geq 0$ を解くと、

$$36 - 6a + 2a + 5 \geq 0 \quad \therefore \frac{41}{4} \geq a$$

であるから、②の解は

$$\begin{cases} a - 2 \text{ または } 10 < a \\ a \leq \frac{41}{4} \end{cases}$$

$$\therefore a < -2 \text{ または } 10 < a \leq \frac{41}{4}$$

よって、い) を満たす a の範囲は

$$10 < a \leq \frac{41}{4}$$

あ), い) より、求める a の範囲は、

$$\boxed{10 < a \leq \frac{41}{4}}$$

➤ 場合分けせずに、

$$\begin{cases} 0 < \frac{a}{2} < 6 \\ f\left(\frac{a}{2}\right) < 0 \\ f(0) \geq 0 \\ f(6) \geq 0 \end{cases}$$

とすることもできる。

(2) $f(x) = 0$ が $0 \leq x \leq 6$ の範囲に少なくとも
もひとつ解をもつのは、 $y = f(x)$ のグラ
フが x 軸の $0 \leq x \leq 6$ の部分と少なくと
もひとつ共有点をもつときである。

$y = f(x)$ のグラフの頂点の x 座標は $\frac{a}{2}$ で

あるから、頂点が区間 $0 \leq x \leq 6$ に

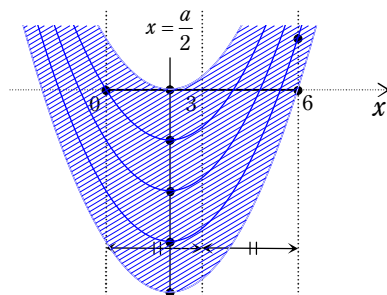
A) 含まれている場合

B) 含まれていない場合

に分けて考える。

A) 条件を満たすのは、頂点の y 座標が 0 以
下であり、かつ「 $x = 0, x = 6$ のうち、対称
軸から遠い方でのグラフの y 座標が 0 以上」
のときであるから、次のように場合分けでき
る。

あ) $0 \leq \frac{a}{2} \leq 3 \quad \therefore 0 \leq a \leq 6$ の場合



条件を満たすのは、グラフが図の斜線部
(境界を含む) に含まれるときであり、

$$\begin{cases} f\left(\frac{a}{2}\right) \leq 0 \\ f(6) \geq 0 \end{cases}$$

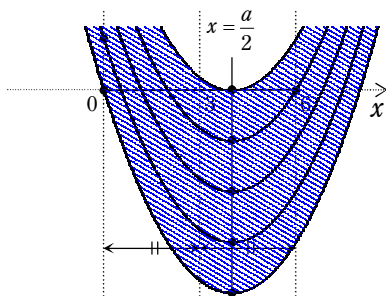
を満たすときである。この解は

$$\begin{cases} a \leq -2 \text{ または } 10 \leq a \\ a \leq \frac{41}{4} \end{cases}$$

$$\therefore a \leq -2 \text{ または } 10 \leq a \leq \frac{41}{4}$$

よって、あ) を満たす a は存在しない。

い) $3 \leq \frac{a}{2} \leq 6 \quad \therefore 6 \leq a \leq 12$ の場合



条件を満たすのは、グラフが図の斜線部（境界を含む）に含まれるときであり、

$$\begin{cases} f\left(\frac{a}{2}\right) \leq 0 \\ f(0) \geq 0 \end{cases}$$

を満たすときである。この解は

$$\begin{cases} a \leq -2 \text{ または } 10 \leq a \\ a \geq -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\therefore -\frac{5}{2} \leq a \leq -2 \text{ または } 10 \leq a$$

よって、い) を満たす a の範囲は、

$$10 \leq a \leq 12$$

➤ A) の $0 \leq \frac{a}{2} \leq 6$ の場合の条件を、あ)、

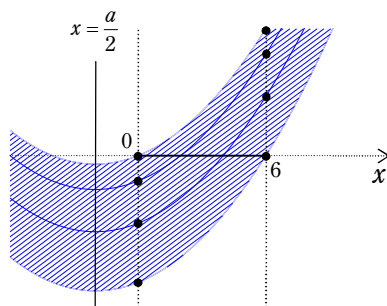
い) と場合分けをせずに

$$\begin{cases} f\left(\frac{a}{2}\right) \leq 0 \\ f(0) \geq 0 \text{ または } f(6) \geq 0 \end{cases}$$

とまとめることもできる。

B) 条件を満たすは、「 $x=0$, $x=6$ のうち、対称軸から近い方でのグラフの y 座標が 0 以下、遠い方でのグラフの y 座標が 0 以上」のときであるから、次のように場合分けできる。

う) $\frac{a}{2} < 0 \quad \therefore a < 0$ のとき、



条件を満たすのは、グラフが図の斜線部（境界を含む）に含まれるときであり、

$$\begin{cases} f(0) \leq 0 \\ f(6) \geq 0 \end{cases}$$

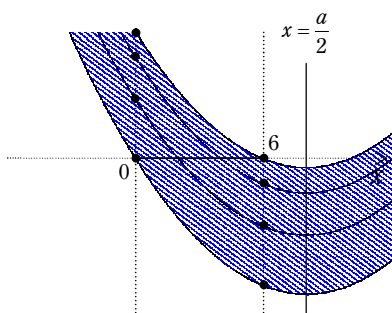
を満たすときである。この解は

$$\begin{cases} a \leq -\frac{5}{2} \\ a \leq \frac{41}{4} \end{cases} \quad \therefore a \leq -\frac{5}{2}$$

であるから、う) を満たす a の範囲は、

$$a \leq -\frac{5}{2}$$

え) $\frac{a}{2} > 6 \quad \therefore a > 12$ のとき,



条件を満たすのは、グラフが図の斜線部 (境界を含む) に含まれるときであり、

$$\begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f(6) \leq 0 \end{cases}$$

を満たすときである。この解は

$$\begin{cases} a \geq -\frac{5}{2} \\ a \geq \frac{41}{4} \end{cases} \quad \therefore a \geq \frac{41}{4}$$

であるから、う) を満たす a の範囲は、
 $a > 12$

あ), い), う), え) より、求める a の範囲は、

$$a \leq -\frac{5}{2}, 10 \leq a$$

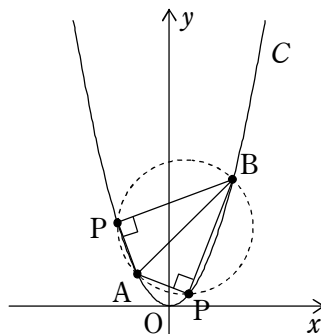
宿題 11-2

(1) $A(-1, 1), P(p, p^2)$ より、PA の傾きは

$$\frac{p^2 - 1}{p - (-1)} = \frac{(p-1)(p+1)}{p+1} = \boxed{p-1}$$

$B(3, 9), P(p, p^2)$ より、PB の傾きは

$$\frac{p^2 - 9}{p - 3} = \frac{(p-3)(p+3)}{p-3} = \boxed{p+3}$$



(2) C 上の点 P が $\angle APB = 90^\circ$ を満たすのは、(P が A, B とは異なる点であり、かつ) PA, PB の傾きの積が -1 となるときであるから、(1)より

$$(p-1)(p+3) = -1$$

が成り立つときである。

これを解くと

$$p^2 + 2p - 3 = -1$$

$$(p+1)^2 = 3$$

$$p+1 = \pm\sqrt{3}$$

$$\therefore p = -1 \pm \sqrt{3}$$

なので、

$$p^2 = (-1 \pm \sqrt{3})^2 = 1 \mp 2\sqrt{3} + 3 = 4 \mp 2\sqrt{3}$$

より、求める P の座標は

$$\boxed{(-1 + \sqrt{3}, 4 - 2\sqrt{3}), (-1 - \sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3})}$$

(3) AB を直径とする円と C との交点は、 A, B , および $\angle APB = 90^\circ$ となる P であるので、(2)より、

$$\boxed{(-1, 1), (3, 9), (-1 + \sqrt{3}, 4 - 2\sqrt{3}), (-1 - \sqrt{3}, 4 + 2\sqrt{3})}$$

の 4 点。

※ 座標平面上の円については、夏期講習の『図形と式』で扱います。お楽しみに！