－ 中3C　宿題プリント (2学期-3)　解答 －

宿題 3-1

> 次の方程式を解け。
>
> (1) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$
>
> (2) $x^3 - 4x^2 - 6x + 5 = 0$
>
> (3) $x^4 - 4x^2 - x + 2 = 0$

(1) $f(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ とおく。
$f(-2) = -8 - 20 + 4 + 24 = 0$ なので、因数定理より、
$f(x)$ は $x+2$ で割り切れる。

$$
\begin{array}{rllll}
 & x^2 & -7x & +12 & \\ \cline{2-5}
x+2 \big) & x^3 & -5x^2 & -2x & +24 \\
 & x^3 & +2x^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & -7x^2 & -2x & \\
 & & -7x^2 & -14x & \\ \cline{3-5}
 & & & 12x & +24 \\
 & & & 12x & +24 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

上の計算より、
$f(x) = (x+2)(x^2 - 7x + 12)$
$\quad = (x+2)(x-3)(x-4)$ と表せる。
よって、3 次方程式 $f(x) = 0$ の解は、$\boxed{x = -2, 3, 4}$

(2) $f(x) = x^3 - 4x^2 - 6x + 5$ とおく。
$f(5) = \underbrace{5^3 - 4 \cdot 5^2}_{(5-4)5^2} - 6 \cdot 5 + 5 = 25 - 30 + 5 = 0$ なので、因数定理より、$f(x)$ は $x-5$ で割り切れる。

$$
\begin{array}{rllll}
 & x^2 & +x & -1 & \\ \cline{2-5}
x-5 \big) & x^3 & -4x^2 & -6x & +5 \\
 & x^3 & -5x^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & x^2 & -6x & \\
 & & x^2 & -5x & \\ \cline{3-5}
 & & & -x & +5 \\
 & & & -x & +5 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

上の計算より、$f(x) = (x-5)(x^2 + x - 1)$ と表せるので、$f(x) = 0$ となるのは
$x - 5 = 0$ または $x^2 + x - 1 = 0$ のとき。
$x^2 + x - 1 = 0$ となる x の値は
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
よって、3 次方程式 $f(x) = 0$ の解は、
$$\boxed{x = 5, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

(3) $f(x) = x^4 - 4x^2 - x + 2$ とおく。
$f(-1) = 1 - 4 + 1 + 2 = 0$ なので、因数定理より、
$f(x)$ は $x+1$ で割り切れる。

$$
\begin{array}{rlllll}
 & x^3 & -x^2 & -3x & +2 & \\ \cline{2-6}
x+1 \big) & x^4 & & -4x^2 & -x & +2 \\
 & x^4 & +x^3 & & & \\ \cline{2-6}
 & & -x^3 & -4x^2 & & \\
 & & -x^3 & -x^2 & & \\ \cline{3-6}
 & & & -3x^2 & -x & \\
 & & & -3x^2 & -3x & \\ \cline{4-6}
 & & & & 2x & +2 \\
 & & & & 2x & +2 \\ \cline{5-6}
 & & & & & 0
\end{array}
$$

上の計算より、$f(x) = (x+1)(x^3 - x^2 - 3x + 2)$ と表せる。
ここで、$g(x) = x^3 - x^2 - 3x + 2$ とおくと、
$g(2) = 8 - 4 - 6 + 2 = 0$ なので、因数定理より、
$g(x)$ は $x-2$ で割り切れる。

$$
\begin{array}{rllll}
 & x^2 & +x & -1 & \\ \cline{2-5}
x-2 \big) & x^3 & -x^2 & -3x & +2 \\
 & x^3 & -2x^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & x^2 & -3x & \\
 & & x^2 & -2x & \\ \cline{3-5}
 & & & -x & +2 \\
 & & & -x & +2 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

上の計算より、$g(x) = (x-2)(x^2 + x - 1)$ と表せる。
以上より、$f(x) = (x+1)(x-2)(x^2 + x - 1)$ と表せるので、4 次方程式 $f(x) = 0$ の解は、
$$\boxed{x = -1, 2, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

＜補足＞ $x^2 + x - 1 = 0$ となる x の値は、(2) で計算してある。

宿題 3-2

円 C： $(x-1)^2+(y-2)^2=5$ と放物線 D： $y=x^2$ の共有点をすべて求めたい。以下の問に答えよ。

(1) C,D の式から y を消去し、x の方程式を作れ。

(2) (1) で作った方程式を解け。

(3) C と D の共有点の座標をすべて答えよ。

(1) $(x-1)^2+(x^2-2)^2=5$
$x^2-2x+1+x^4-4x^2+4=5$
$\boxed{x^4-3x^2-2x=0}$ $\cdots$①

(2) $x^4-3x^2-2x=0$
$x(x^3-3x-2)=0$
$x=0$ または $x^3-3x-2=0$ $\cdots$②

$f(x)=x^3-3x-2$ とおくと、$f(-1)=-1+3-2=0$ なので、因数定理より $f(x)$ は $x+1$ で割り切れる。

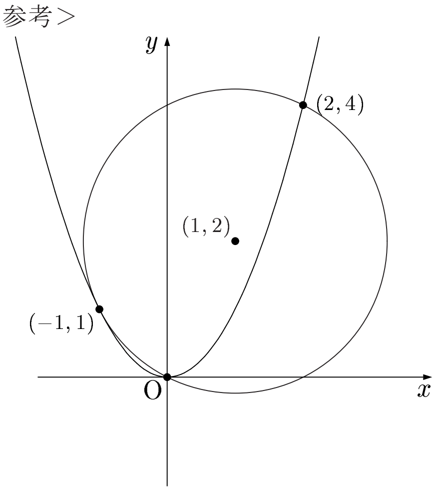
$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & x^2 & -x & -2 & \\
x+1 & x^3 & & -3x & -2 \\
 & x^3 & +x^2 & & \\
\hline
 & & -x^2 & -3x & \\
 & & -x^2 & -x & \\
\hline
 & & & -2x & -2 \\
 & & & -2x & -2 \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}
$$

上の計算より、
$f(x)=(x+1)(x^2-x-2)=(x+1)^2(x-2)$
と表せる。
よって、② の 3 次方程式の解は $x=-1$(重解), 2

以上より、(1) で求めた方程式 $x^4-3x^2-2x=0$ の解は $\boxed{x=0,-1,2}$

(3) 放物線 D の式 $y=x^2$ から y 座標を求めて、
$\boxed{(0,0),\ (-1,1),\ (2,4)}$ が C と D の共有点の座標。

＜参考＞



宿題 3-3

A$(2,1)$, B$(8,9)$ とする。次の円の式を求めよ。(式の形は問わない。)

(1) A を中心とし、B を通る円 C

(2) A,B を直径の両端とする円 D

(3) A,B および 原点 O$(0,0)$ の 3 点を通る円 E

(1) $\mathrm{AB}=\sqrt{(8-2)^2+(9-1)^2}=\sqrt{36+64}=\sqrt{100}$
$=10$
が円 C の半径。
したがって、円 C の方程式は
$\boxed{(x-2)^2+(y-1)^2=100}$

(2) 線分 AB の中点 M の座標は、
$\left(\dfrac{2+8}{2},\dfrac{1+9}{2}\right)=(5,5)$
これが円 D の中心であり、半径は $\dfrac{\mathrm{AB}}{2}=\dfrac{10}{2}=5$
以上より、円 D の方程式は
$\boxed{(x-5)^2+(y-5)^2=25}$

(3) 円 E の方程式を $x^2+y^2+sx+ty+u=0$ とおく。
A$(2,1)$ を通ることより、$4+1+2s+t+u=0$ $\cdots$①
B$(8,9)$ を通ることより、$64+81+8s+9t+u=0$ $\cdots$②
O$(0,0)$ を通ることより、$u=0$ $\cdots$③
③ を ①, ② に代入して
$$\begin{cases}5+2s+t=0\\145+8s+9t=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}s=10\\t=-25\end{cases}$$
以上より、求める円 E の方程式は
$\boxed{x^2+y^2+10x-25y=0}$

＜別解＞
直線 AB の式は
$y=\dfrac{9-1}{8-2}(x-2)+1$
$y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{5}{3}$
$4x-3y-5=0$ $\cdots$④
直線 AB と円 D： $x^2+y^2-10x-10y+25=0$ $\cdots$⑤
は 2 点 A,B で交わっているので、⑤ + ④ × 5 により得られる定数項が 0 である等式
$x^2+y^2+10x-25y=0$
は、A,B,O の 3 点を通る図形 (円) を表している。
したがって、これが求める円 E の式である。

宿題 3-4

(1) n が 7 で割ると 3 余る整数だとする。
このとき、$700n^9 - n^2 + 5n + 3$ を 7 で割った余りを求めよ。

(2) 3^{20} を 13 で割った余りを求めよ。

(3) 19^{2015} を 17 で割った余りを求めよ。

(1) 合同式は (mod 7) とする。

$700n^9 - n^2 + 5n + 3$
$\equiv 0 - n^2 + 5n + 3 \quad (700 \equiv 0$ より)
$\equiv -3^2 + 5 \cdot 3 + 3 \quad (n \equiv 3$ より)
$\equiv 9 \equiv 2$

よって、求める余りは $\boxed{2}$

(2) 合同式は (mod 13) とする。

$3^3 = 27 \equiv 1$ なので、
$(3^3)^6 \equiv 1^6$
$3^{18} \equiv 1$
$3^{20} = 3^{18} \cdot 3^2 \equiv 1 \cdot 9 \equiv 9$

よって、求める余りは $\boxed{9}$

(3) 合同式は (mod 17) とする。

$19 \equiv 2$ なので、$19^{2015} \equiv 2^{2015} \quad \cdots$①
$2^4 = 16 \equiv -1$ なので、
$(2^4)^{503} \equiv (-1)^{503}$
$2^{2012} \equiv -1$
$2^{2015} = 2^{2012} \cdot 2^3 \equiv (-1) \cdot 8 \equiv -8 \equiv 9$

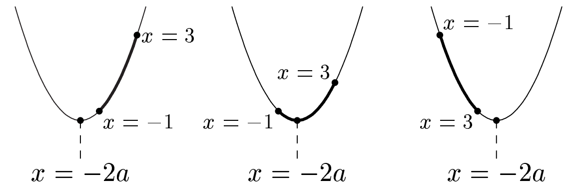
よって、① より、$19^{2015} \equiv 9$ であり、求める余りは $\boxed{9}$

宿題 3-5

$f(x) = x^2 + 4ax + a$ とする。
$-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲での $y = f(x)$ の最小値 m を a の値で分類して答えよ。

$f(x) = x^2 + 4ax + a = (x + 2a)^2 - 4a^2 + a$ より、$y = f(x)$ のグラフは、頂点が $(-2a, -4a^2 + a)$ である、下に凸な放物線。

軸 $x = -2a$ と 範囲 $-1 \leqq x \leqq 3$ の位置関係で分類して考える。



$-2a \leqq -1$ のとき ($a \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき)、
$x = -1$ で最小。最小値は $f(-1) = -3a + 1$

$-1 \leqq -2a \leqq 3$ のとき ($-\dfrac{3}{2} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき)、
$x = -2a$ で最小。最小値は $f(-2a) = -4a^2 + a$

$-2a \geqq 3$ のとき ($a \leqq -\dfrac{3}{2}$ のとき)、
$x = 3$ で最小。最小値は $f(3) = 13a + 9$

以上をまとめると、

$$m = \begin{cases} -3a + 1 & \cdots a \geqq \dfrac{1}{2} \text{のとき} \\ -4a^2 + a & \cdots -\dfrac{3}{2} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2} \text{のとき} \\ 13a + 9 & \cdots a \leqq -\dfrac{3}{2} \text{のとき} \end{cases}$$