－ 中 3C　宿題プリント (2 学期-4)　解答 －

宿題 4-1

> x の 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ の 2 解が以下の場合について、p, q を求めよ。
>
> (1)　$-2, 5$
>
> (2)　-3 (重解)

(1)　解が $-2, 5$ である 2 次方程式として、

$(x+2)(x-5)=0$

$x^2-3x-10=0$

が見つかる。

よって、$\boxed{p=-3,\ q=-10}$

別解　2 次方程式の解と係数の関係より、

$$\begin{cases} (-2)+5=-p \\ (-2)\cdot 5=q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=-3 \\ q=-10 \end{cases}$$

(2)　-3 が重解である 2 次方程式として、

$(x+3)^2=0$

$x^2+6x+9=0$

が見つかる。

よって、$\boxed{p=6,\ q=9}$

別解　2 次方程式の解と係数の関係より、

$$\begin{cases} (-3)+(-3)=-p \\ (-3)\cdot(-3)=q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=6 \\ q=9 \end{cases}$$

宿題 4-2

> 次の 2 次方程式の 2 解を α, β とするとき、$\alpha+\beta, \alpha\beta$ の値を求めよ。
>
> (1)　$x^2+3x+1=0$
>
> (2)　$2x^2-5x-4=0$

(1)　$x^2+3x+1=(x-\alpha)(x-\beta)$

$=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ より、

$$\begin{cases} 3=-(\alpha+\beta) \\ 1=\alpha\beta \end{cases}$$

$\therefore\ \boxed{\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=1}$

(2 次方程式の解と係数の関係から求めてもよい。)

(2)　$2x^2-5x-4=2(x-\alpha)(x-\beta)$

$=2\left(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right)$

$=2x^2-2(\alpha+\beta)x+2\alpha\beta$ より、

$$\begin{cases} -5=-2(\alpha+\beta) \\ -4=2\alpha\beta \end{cases}$$

$\therefore\ \boxed{\alpha+\beta=\frac{5}{2},\ \alpha\beta=-2}$

(2 次方程式の解と係数の関係から求めてもよい。)

宿題 4-3

> 円 C :　$(x-3)^2+(y-2)^2=2$ と円 D :　$x^2+y^2=9$ は異なる 2 点 P,Q で交わっている。以下の問に答えよ。
>
> (1)　直線 PQ の式を求めよ。
>
> (2)　2 点 P,Q と原点 O$(0,0)$ を通る円の式 E を求めよ。

(1)　$\begin{cases} (x-3)^2+(y-2)^2=2 & \cdots ① \\ x^2+y^2=9 & \cdots ② \end{cases}$

という連立方程式の解が交点 P,Q の座標なので、

① − ② を作ると、

$-6x-4y+13=-7$

$6x+4y-20=0$

$3x+2y-10=0\ \cdots ③$

となり、P,Q の座標は ③ も満たす。

すなわち、③ の表す直線は、P,Q を通るので、

直線 PQ の式は、$\boxed{3x+2y-10=0}$

(2 点 P,Q を通る直線は 1 本だけなので、他に答はない)

(2)　円 C の式は $x^2+y^2-6x-4y+11=0\ \cdots ①'$

円 D の式は $x^2+y^2-9=0\ \cdots ②'$

と表せる。

①′ と ②′ から定数項が 0 である等式を作れば、それは原点 O$(0,0)$ を通る図形を表すので、①′ × 9 + ②′ × 11 を作ると、

$20x^2+20y^2-54x-36y=0$

$x^2+y^2-\frac{27}{10}x-\frac{9}{5}y=0\ \cdots ④$ となる。

①′,②′ が共に P と Q を通る円を表すので、④ の表す図形も P と Q を通り、定数項が 0 であることから原点 O も通っている。

④ は式の形から、円・1 点・空集合のいずれかを表すが、異なる 2 点 P,Q を通ることから、円を表しているとわかる。

以上より、3 点 P,Q,O を通る円 E の式は、

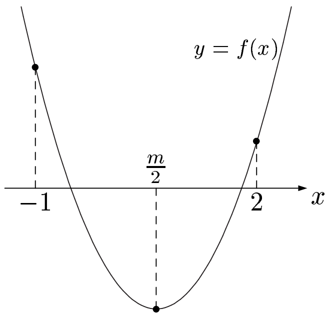
$\boxed{x^2+y^2-\frac{27}{10}x-\frac{9}{5}y=0}$ である。

(3 点 P,Q,O を通る円は 1 つだけなので、他に答はない。)

宿題 4-4

$f(x)=x^2-mx-3m$ とする。
x の 2 次方程式 $f(x)=0$ が $-1<x<2$ の範囲に、異なる 2 個の解を持つか、
または重解をもつような m の範囲を求めよ。

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x-\tfrac{m}{2}\right)^2-\left(\tfrac{m}{2}\right)^2-3m \\ &= \left(x-\tfrac{m}{2}\right)^2-\tfrac{m^2}{4}-3m \end{aligned}$$



$f(x)=0$ が $-1<x<2$ の範囲に、異なる 2 個の解を持つか、または重解を持つのは、上図のように $y=f(x)$ のグラフが x 軸の $-1<x<2$ の部分と異なる 2 点で交わるか接するとき。

その条件は

$$\begin{cases} \text{頂点の } x \text{ 座標が } -1<x<2 \text{ の範囲内} \\ \text{頂点の } y \text{ 座標が } 0 \text{ 以下} \\ x=-1,2 \text{ での } y \text{ 座標が正} \end{cases}$$

すなわち、

$$\begin{cases} -1<\frac{m}{2}<2 \\ f(\frac{m}{2})\leqq 0 \\ f(-1)>0 \\ f(2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<4 \\ -\frac{m^2}{4}-3m\leqq 0 \\ m<\frac{1}{2} \\ m<\frac{4}{5} \end{cases} \quad \cdots ☆$$

ここで $-\frac{m^2}{4}-3m\leqq 0$ をみたす m の範囲は
$m^2+12m\geqq 0$
$m(m+12)\geqq 0$
$m\leqq -12,\ m\geqq 0$ である。

したがって、☆をみたす m の範囲は、

$$\boxed{0\leqq m<\frac{1}{2}}$$