− 中 3C　宿題プリント (2 学期-5)　解答 −

宿題 5-1

x の 3 次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ の 3 解が以下の場合について、p,q,r を求めよ。

(1) $1,3,4$

(2) $1,2$ (2 が 2 重解)

(1) 解が $1,3,4$ である 3 次方程式として、

$(x-1)(x-3)(x-4)=0$

$(x^2-4x+3)(x-4)=0$

$x^3-8x^2+19x-12=0$

が見つかる。

よって、$\boxed{p=-8,\ q=19,\ r=-12}$

別解

3 次方程式の解と係数の関係より、

$$\begin{cases} 1+3+4=-p \\ 1\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 1=q \\ 1\cdot 3\cdot 4=-r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=-8 \\ q=19 \\ r=-12 \end{cases}$$

(2) 解が $1,2$ (2 が 2 重解) である 3 次方程式として、

$(x-1)(x-2)(x-2)=0$

$(x-1)(x^2-4x+4)=0$

$x^3-5x^2+8x-4=0$

が見つかる。

よって、$\boxed{p=-5,\ q=8,\ r=-4}$

別解

3 次方程式の解と係数の関係より、

$$\begin{cases} 1+2+2=-p \\ 1\cdot 2+2\cdot 2+2\cdot 1=q \\ 1\cdot 2\cdot 2=-r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p=-5 \\ q=8 \\ r=-4 \end{cases}$$

宿題 5-2

3 次方程式 $x^3-3x^2-2x+5=0$ の 3 解を α,β,γ とする。以下の値を求めよ。

(1) $I=\alpha+\beta+\gamma$

(2) $J=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

(3) $K=\alpha\beta\gamma$

3 次方程式の解と係数の関係より、

(1) $I=\alpha+\beta+\gamma=\boxed{3}$

(2) $J=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\boxed{-2}$

(3) $K=\alpha\beta\gamma=\boxed{-5}$

補足

3 次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ の 3 解が α,β,γ のとき、

$x^3+px^2+qx+r=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ $\cdots$①

と因数分解できる。

① の右辺は

$$\begin{aligned} &\bigl(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\bigr)(x-\gamma) \\ &=x^3-(\alpha+\beta)x^2\qquad+\alpha\beta x \\ &\qquad\quad-\gamma x^2+(\alpha+\beta)\gamma x-\alpha\beta\gamma \\ &=x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

と展開できる。これと ① の左辺と対応する係数を比べ、

$$\begin{cases} p=-(\alpha+\beta+\gamma) \\ q=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \\ r=-\alpha\beta\gamma \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-p \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q \\ \alpha\beta\gamma=-r \end{cases}$$

が成り立つとわかる。

これを **3 次方程式の解と係数の関係**と呼ぶ。

なお、① の右辺を展開するには、展開後のそれぞれの次数の項がどのように生じるかを考えてもよい。

例えば、x^2 の項は、3 つのカッコから何を選んでかけるかに注目し、

$-\alpha\cdot x\cdot x-x\cdot\beta\cdot x-x\cdot x\cdot\gamma=-(\alpha+\beta+\gamma)x^2$

となることが見抜ける。

1 次の項、定数項についても同様に見抜くことができる。

宿題 5-3

2 次方程式 $x^2+3x-2=0$ の 2 解を α,β とするとき、以下の値を求めよ。

(1) $I=\alpha+\beta$

(2) $J=\alpha\beta$

(3) $K=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

(4) $L=(3-\alpha)(3-\beta)$

(5) $M=\alpha^2+\beta^2$

2 次方程式の解と係数の関係より、

$\alpha+\beta=\boxed{-3}\cdots$(1) の答 I

$\alpha\beta=\boxed{-2}\cdots$(2) の答 J

である。

(3) $K=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\dfrac{-3}{-2}=\boxed{\dfrac{3}{2}}$

(4) $L=(3-\alpha)(3-\beta)=9-3(\alpha+\beta)+\alpha\beta$

$\quad=9-3(-3)+(-2)=\boxed{16}$

別解

$x^2+3x-2=(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解できるので、

両辺に $x=3$ を代入すれば、

$3^2+3\cdot 3-2=(3-\alpha)(3-\beta)$

$\therefore\ (3-\alpha)(3-\beta)=\boxed{16}$

(5) $M=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-3)^2-2(-2)$
$= \boxed{13}$

別解

α,β は $x^2+3x-2=0$ の解なので、
$\alpha^2+3\alpha-2=0 \ \cdots①$
$\beta^2+3\beta-2=0 \ \cdots②$
が成立。① + ② より、
$\alpha^2+\beta^2+3(\alpha+\beta)-4=0$
$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=-3(\alpha+\beta)+4=-3(-3)+4=\boxed{13}$

宿題 5-4

(1) $(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-\boxed{ア}x+\boxed{イ}$
の空欄に当てはまる α,β の式を答えよ。

(2) 以下の連立方程式を解きたい。
$$\begin{cases}\alpha+\beta=3\\ \alpha\beta=1\end{cases}$$
(i) α,β を 2 解にもつ x の 2 次方程式 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ を α,β を用いない形で表せ。
(ii) (i) を利用して α,β を求めよ。

(3) 周の長さが 6, 面積が 1 であるような長方形の 2 辺の長さを求めよ。

(1) $(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

すなわち、
ア: $\boxed{\alpha+\beta}$　　イ: $\boxed{\alpha\beta}$

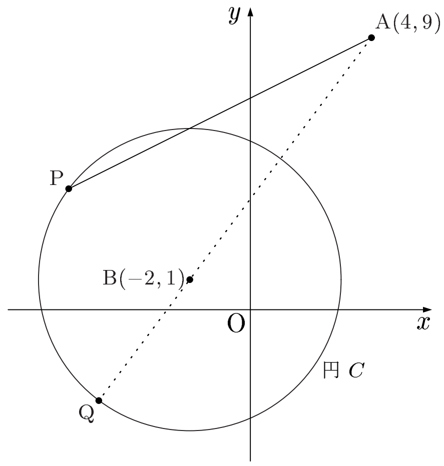
(2) (i)
(1) の結果に、$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$ を代入すると、
$\boxed{x^2-3x+1=0}\ \cdots①$

(ii) ① の左辺を平方完成すると、
$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+1=0$$
$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$$
$$x-\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\frac{5}{4}}=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$x=\boxed{\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}}$$
(解の公式で求めてもよい)
これが α,β である。

(3) 長方形の 2 辺の長さを α,β とおくと、
$$\begin{cases}2\alpha+2\beta=6\\ \alpha\beta=1\end{cases}\quad\therefore\ \begin{cases}\alpha+\beta=3\\ \alpha\beta=1\end{cases}$$
である。
これをみたす α,β は (1) で求めてあるので、求める長方形の 2 辺の長さは $\boxed{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\text{ と }\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ である。
(ともに正であり、長方形の辺として適する。)

宿題 5-5

定点 A$(4,9)$ と円 C： $(x+2)^2+(y-1)^2=25$ の周上を動く点 P を考える。
AP の長さが最大となるときの、P の座標を求めよ。



円 C の中心 $(-2,1)$ を B とする。
$\mathrm{AP}\leqq\mathrm{AB}+\underbrace{\mathrm{BP}}_{\text{半径}}=(一定)\ \cdots①$
が常に成り立つ。(三角不等式)
① の等号は、A,B,P がこの順に一直線上にあるとき成立するので、このとき AP の長さは最大となる。

すなわち、直線 AB と円 C の交点のうち、点 A から遠い方を Q とおくと、P が Q と一致するとき、AP の長さの最大値は最大となる。

直線 AB の式は
$$y=\frac{9-1}{4-(-2)}(x-4)+9$$
$$y=\frac{4}{3}(x-4)+9$$
$$y=\frac{4}{3}x+\frac{11}{3}\ \cdots②$$
であり、この直線と円 C の交点の x 座標は
$$(x+2)^2+\left(\frac{4}{3}x+\frac{11}{3}-1\right)^2=25\ \cdots③$$
の実数解である。

③ を解くと、
$$(x+2)^2+\left(\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}\right)^2=25$$
$$(x+2)^2+\frac{16}{9}(x+2)^2=25$$
$$\frac{25}{9}(x+2)^2=25$$
$$(x+2)^2=9$$
$$x+2=\pm3$$
$$x=-5,1$$
これより、Q の x 座標は -5 とわかり、② より y 座標は $\frac{4}{3}(-5)+\frac{11}{3}=-3$ である。

以上より、AP の長さが最大となる点 P の座標は、
$\boxed{\mathrm{P}(-5,-3)}$