－ 中 3C　宿題プリント (2 学期-6)　解答 －

宿題 6-1

3 次方程式 $x^3+2x^2-3x-1=0$ の 3 解を α,β,γ とする。以下の値を求めよ。

(1) $I=\alpha+\beta+\gamma$

(2) $J=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

(3) $K=\alpha\beta\gamma$

(4) $L=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}$

(5) $M=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

3 次方程式の解と係数の関係より、

$I=\alpha+\beta+\gamma=\boxed{-2}$

$J=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\boxed{-3}$

$K=\alpha\beta\gamma=\boxed{1}$

(4) $L=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{-3}{1}=\boxed{-3}$

(5) $M=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=(-2)^2-2(-3)=\boxed{10}$

宿題 6-2

(1) 次の空欄に当てはまる α,β,γ の式を求めよ。

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=x^3-\boxed{ア}\,x^2+\boxed{イ}\,x-\boxed{ウ}$

(2) 以下の連立方程式を解きたい。

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=7\\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=13 \qquad (\alpha\leqq\beta\leqq\gamma)\\ \alpha\beta\gamma=3\end{cases}$$

(i) α,β,γ を 3 解にもつ x の 3 次方程式 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$ を α,β,γ を用いない形で表せ。

(ii) (i) を利用して、α,β,γ を求めよ。

(3) 長さ 28cm の針金を 12 本に切り分け、それらを辺とする直方体を作った。その直方体の表面積が 26cm^2, 体積が 3cm^3 であったとき、3 辺の長さを求めよ。

(1) $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ を展開したとき、2 次の項が生じるのは、3 つのカッコのうち 2 つからは x を、残りの 1 つのカッコからは定数を出してかけた場合なので、

$-\alpha\cdot x\cdot x-x\cdot\beta\cdot x-x\cdot x\cdot\gamma=-(\alpha+\beta+\gamma)x^2$

同様に 1 次の項が生じるのは、3 つのカッコのうち 2 つからは定数を、残りの 1 つのカッコからは x を出してかけた場合なので、

$\alpha\cdot\beta\cdot x+\alpha\cdot x\cdot\gamma+x\cdot\beta\cdot\gamma=(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x$

定数項が生じるのは、3 つのカッコすべてから定数を出してかけた場合なので、

$-\alpha\cdot\beta\cdot\gamma=-\alpha\beta\gamma$

以上より、

ア: $\boxed{\alpha+\beta+\gamma}$　イ: $\boxed{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}$　ウ: $\boxed{\alpha\beta\gamma}$

(2) (i)　(1) の結果より、

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$ は、

$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x-\alpha\beta\gamma=0$

と変形できる。これに

$\alpha+\beta+\gamma=7,$

$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=13,$

$\alpha\beta\gamma=3$

を代入すると、

$\boxed{x^3-7x^2+13x-3=0}$ $\cdots$① となる。

(ii)　$x=3$ を ① の左辺に代入すると 0 となるので、① の左辺は $x-3$ で割り切れる。(因数定理より)

実際に割ると、① は $(x-3)(x^2-4x+1)=0$ $\cdots$①′ と変形できる。

①′ をみたす x は、

$x-3=0$ または $x^2-4x+1=0$ を解いて、

$x=3, 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}$

$\alpha\leqq\beta\leqq\gamma$ より、

$\boxed{\alpha=2-\sqrt{3},\ \beta=3,\ \gamma=2+\sqrt{3}}$

(3) 直方体の 3 辺の長さを α, β, γ とおくと、
針金の長さが 28cm なので、
$4(\alpha+\beta+\gamma)=28$
$\alpha+\beta+\gamma=7 \cdots ②$

表面積が $26\mathrm{cm}^2$ なので、
$2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=26$
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=13 \cdots ③$

体積が $3\mathrm{cm}^3$ なので、
$\alpha\beta\gamma=3 \cdots ④$

$$\begin{cases} ② \\ ③ \\ ④ \end{cases}$$

という連立方程式は (2) で考えたものと一致しているので、$\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$ とすると、
$\alpha=2-\sqrt{3},\ \beta=3,\ \gamma=2+\sqrt{3}$ である。
これらはすべて正であり、辺の長さとして適するので、
求める 3 辺の長さは、
$\boxed{2-\sqrt{3}, 3, 2+\sqrt{3}}$ (cm)

宿題 6-3

次のような整式 $f(x)$ を求めよ。(式の形は問わない)

(1) $f(x)$ は 3 次式で、$f(2)=0, f(5)=0, f(-1)=0$, 定数項が 30

(2) $f(x)$ は 2 次式で、$f(-1)=0, f(1)=0, f(2)=9$

(3) $f(x)$ は 2 次式で、$f(1)=1, f(2)=2$, 最高次係数が 3

(1) $f(x)$ は 3 次式で、$f(2)=0, f(5)=0, f(-1)=0$ であることから、
$f(x)=a(x-2)(x-5)(x+1)$ (a は 0 でない定数)
とおける。

右辺を展開したときの定数項は $10a$ であり、これが 30 なので、$a=3$

以上より、
$f(x)=\boxed{3(x-2)(x-5)(x+1)}$

(2) $f(x)$ は 2 次式で、$f(-1)=0, f(1)=0$ より、
$f(x)=a(x+1)(x-1)$ (a は 0 でない定数)
とおける。

これに $x=2$ を代入すると、
$f(2)=a\cdot 3\cdot 1$
これと $f(2)=9$ より、
$9=3a \quad \therefore\ a=3$
以上より、$f(x)=\boxed{3(x+1)(x-1)}$

(3) $f(x)$ は最高次係数が 3 の 2 次式なので、
$f(x)=3x^2+bx+c$ (b, c は定数)
とおける。

$f(1)=1$ より、$3+b+c=1 \cdots ①$
$f(2)=2$ より、$12+2b+c=2 \cdots ②$

② − ① より
$9+b=1 \quad \therefore\ b=-8$
① に代入して、$3+(-8)+c=1 \quad \therefore\ c=6$
以上より、
$f(x)=\boxed{3x^2-8x+6}$

別解
$g(x)=f(x)-x$ とおくと、$g(x)$ は最高次係数が 3 である 2 次式であり、$f(1)=1,\ f(2)=2$ より、
$g(1)=0,\ g(2)=0$ である。

よって、$g(x)=3(x-1)(x-2)$ なので、
$f(x)=g(x)+x=\boxed{3(x-1)(x-2)+x}$

宿題 6-4

> $f(x)=-x^2+kx+k$ とする。以下の問に答えよ。
>
> (1) x がすべての実数を動くときの $y=f(x)$ の最大値が 1 となる k の値をすべて求めよ。
>
> (2) $-2\leqq x\leqq 1$ の範囲での $y=f(x)$ の最大値 M を k の値で分類して答えよ。

$f(x)=-x^2+kx+k=-\left(x-\dfrac{k}{2}\right)^2+\dfrac{k^2}{4}+k$

より、$y=f(x)$ のグラフは上に凸な放物線で、頂点が

$\left(\dfrac{k}{2},\dfrac{k^2}{4}+k\right)$ である。

(1) x がすべての実数を動くときの $y=f(x)$ の最大値は、

$\dfrac{k^2}{4}+k$ である。これが 1 となるのは、

$\dfrac{k^2}{4}+k=1$

$k^2+4k-4=0$

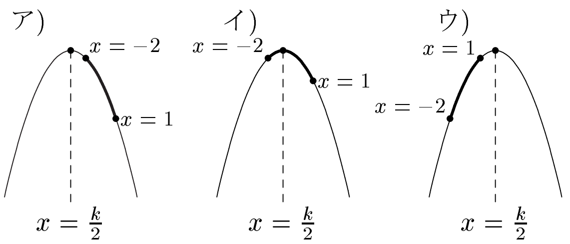
$(k+2)^2-2^2-4=0$

$(k+2)^2=8$

$k+2=\pm 2\sqrt{2}$

$\boxed{k=-2\pm 2\sqrt{2}}$

(2) $-2\leqq x\leqq 1$ と頂点の x 座標 $\dfrac{k}{2}$ の位置関係で場合分けをする。



ア) $\dfrac{k}{2}\leqq -2$ のとき　($k\leqq -4$ のとき)

$x=-2$ で y は最大となり、最大値は

$y=-(-2)^2+k(-2)+k=-k-4$

イ) $-2\leqq\dfrac{k}{2}\leqq 1$ のとき　($-4\leqq k\leqq 2$ のとき)

$x=\dfrac{k}{2}$ で y は最大となり、最大値は $y=\dfrac{k^2}{4}+k$

ウ) $\dfrac{k}{2}\geqq 1$ のとき　($k\geqq 2$ のとき)

$x=1$ で y は最大となり、最大値は

$y=-1^2+k+k=2k-1$

以上より、

$$\boxed{M=\begin{cases}-k-4 & \cdots k\leqq -4 \text{ のとき}\\ \dfrac{k^2}{4}+k & \cdots -4\leqq k\leqq 2 \text{ のとき}\\ 2k-1 & \cdots k\geqq 2 \text{ のとき}\end{cases}}$$