中3数学D　復習テスト解答　2学期-2

［剰余定理を利用する解答］

復習 2-1

剰余定理より，求める余りは

(1)　$f(1)=1-2+3-4=\boxed{-2}$

(2)　$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{3}{4}-2+6=\boxed{3}$

復習 2-2

(1)　$f(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割った商を $Q(x)$ とおくと，

$$f(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+5x+8 \cdots ①$$

である．剰余定理より，求める余りは

$$f(2)=10+8=\boxed{18} \cdots\cdots ②$$

(2)　$f(x)$ を $x-1$ で割った余りが 3 なので，剰余定理より

$$f(1)=3 \cdots\cdots ③$$

また，①より

$$f(3)=15+8=23 \cdots\cdots ④$$

である．

$f(x)$ を 3 次式 $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割った余り $r(x)$ は 2 次以下の整式なので，

$$r(x)=ax^2+bx+c$$

とおく．商を $q(x)$ とすると

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)q(x)+ax^2+bx+c$$

である．ここに $x=1,2,3$ を代入すると，②，③，④より

$$\begin{cases} 4a+2b+c=18 \\ a+b+c=3 \\ 9a+3b+c=23 \end{cases}$$

これを解いて

$$a=-5, b=30, c=-22$$

よって，求める余りは $\boxed{-5x^2+30x-22}$．

［剰余定理を利用しない解答］

1.

(1)，(2)ともに，1 次式 $g(x)$ で割った余りの定数を r，商の整式を $Q(x)$ とおくと，

(1)　$f(x)=(x-1)Q(x)+r$

であるから，

$$r=f(1)=1-2+3-4=\boxed{-2}$$

(2)　$f(x)=(2x+1)Q(x)+r$

であるから，

$$r=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-2+6=\boxed{3}$$

2.

(1)　$f(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割った商を $Q(x)$ とおくと，

$$f(x)=\underbrace{(x-2)(x-3)Q(x)}_{[A]}+5x+8 \cdots ①$$

である．

①において，[A] の部分は $x-2$ で割り切れているので，

　$f(x)$ を $x-2$ で割った余り

は，

　$5x+8$ を $x-2$ で割った余り

に等しく，

$$\begin{array}{r} 5 \\ x-2\overline{\smash{)}5x+8} \\ \underline{5x-10} \\ 18 \end{array}$$

より，求める余りは $\boxed{18}$．

(2) **［(1)と同様に余りを割っていく方針］**

$f(x)$ を 3 次式 $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割った余り $r(x)$ は 2 次以下の整式なので,

$$r(x)=ax^2+bx+c$$

とおく．商を $q(x)$ とすると

$$f(x)=\underbrace{(x-1)(x-2)(x-3)q(x)}_{[\mathrm{B}]}+ax^2+bx+c \quad\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

である．

②において，[B] の部分は

$$(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$$

で割り切れているので,

$f(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割った余り

は,

$r(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割った余り

に等しく,

$$\begin{array}{r|rrr} & & & a \\ \hline x^2-5x+6 & ax^2+ & b\,x+ & c \\ & ax^2- & 5a\,x+ & 6a \\ \hline & & (5a+b)x+ & (-6a+c) \end{array}$$

より，$(5a+b)x+(-6a+c)$．

仮定より，これは $5x+8$ なので,

$$\begin{cases} 5a+b=5 \\ -6a+c=8 \end{cases} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

また，②において，[B] の部分は $x-1$ で割り切れているので,

$f(x)$ を $x-1$ で割った余り

は,

$r(x)$ を $x-1$ で割った余り

に等しく,

$$\begin{array}{r|rrr} & & ax+ & a+b \\ \hline x-1 & ax^2+ & b\,x+ & c \\ & ax^2- & a\,x & \\ \hline & & (a+b)x+ & c \\ & & (a+b)x- & (a+b) \\ \hline & & & a+b+c \end{array}$$

より，$a+b+c$．

仮定より，これは 3 であるので,

$$a+b+c=3 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

③，④より,

$$a=-5,\ b=30,\ c=-22$$

$$\therefore r(x)=\boxed{-5x^2+30x-22}$$

［(1)，①式の商を割る方針］

(1)，①式において，商の $Q(x)$ を $x-1$ で割った商を $R(x)$，余りの定数を s とおくと,

$$Q(x)=(x-1)R(x)+s$$

であるから,

$$f(x)=(x-2)(x-3)\{(x-1)R(x)+s\}+5x+8$$

$$\therefore f(x)=\underbrace{(x-1)(x-2)(x-3)R(x)}_{[\mathrm{C}]}+s(x-2)(x-3)+5x+8$$

この式より，$f(x)$ を $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割った余りは

$$s(x-2)(x-3)+5x+8 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

であるから，あとは s を求めればよい．

[C] の部分は $x-1$ で割り切れているので,

$f(x)$ を $x-1$ で割った余り

は,

⑤を $x-1$ で割った余り

に等しく,

$$\begin{aligned} ⑤ &= s(x^2-5x+6)+5x+8 \\ &= s\{(x-1)(x-4)+2\}+5(x-1)+13 \\ &= (x-1)\{s(x-4)+5\}+2s+13 \end{aligned}$$

より，$2s+13$ である．

仮定より，これは 3 であるので,

$$2s+13=3 \quad \therefore s=-5$$

したがって，求める余りである⑤は

$$-5(x-2)(x-3)+5x+8$$

$$=\boxed{-5x^2+30x-22}$$