

中3数学D 復習テスト解答 2学期-5

1.

$x^2 + 5x + 3 = 0$ の2解が α, β なので、方程式の左辺は

$$x^2 + 5x + 3 = (x - \alpha)(x - \beta)$$

と因数分解される．両辺の係数を比較して、

$$\begin{cases} 5 = -\alpha - \beta \\ 3 = \alpha\beta \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \alpha + \beta = -5 \\ \alpha\beta = 3 \end{cases}$$

これを利用して計算すると、

$$(1) \quad \alpha^2 + \beta^2 \\ = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-5)^2 - 2 \cdot 3 = \boxed{19}$$

$$(2) \quad \alpha^3 + \beta^3 \\ = (\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2) - \alpha\beta(\alpha + \beta) \\ = -5 \cdot 19 - 3 \cdot (-5) = \boxed{-80}$$

$$(3) \quad \alpha^5 + \beta^5 \\ = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^3 + \beta^3) - (\alpha\beta)^2(\alpha + \beta) \\ = 19 \cdot (-80) - 3^2 \cdot (-5) = \boxed{-1475}$$

2.

$$(1) \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \\ = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) \\ \text{なので、} \\ 7 = 3^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) \\ \therefore \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \boxed{1}$$

$$(2) \quad \text{まず、} \\ \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 \\ = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 - 2(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2) \\ \text{より、} \\ 35 = 7^2 - 2(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2) \\ \therefore \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 = 7 \\ \text{が分かる．さらに、} \\ \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 \\ = (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \\ \text{なので、} \\ 7 = 1^2 - 2\alpha\beta\gamma \cdot 3 \\ \therefore \alpha\beta\gamma = \boxed{-1}$$

$$(3) \quad \text{以上より、} \\ \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 3 \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 1 \\ \alpha\beta\gamma = -1 \end{cases}$$

なので、あとは復習 4-2 と同様である．

α, β, γ を3解にもつ x の3次方程式

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0$$

の左辺を展開すると

$$x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$$

となり、この方程式を解くと、

$$(x - 1)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 1, 1 \pm \sqrt{2}$$

これが α, β, γ であるから、 $\alpha < \beta < \gamma$ より

$$\boxed{\alpha = 1 - \sqrt{2}, \beta = 1, \gamma = 1 + \sqrt{2}}$$