

宿題 1-3

$$C: y = x^2$$

$$l: y = -2x + 3$$

- (1) C と l の交点の x 座標は

$$x^2 = -2x + 3$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x+3)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -3, 1$$

であるから, $A \boxed{(-3, 9)}$, $B \boxed{(1, 1)}$.

- (2) 線分 AB の垂直二等分線と C の交点であることを利用する方針 A と, PA と PB の長さが等しいことを利用して方程式を立てる方針 B がある.

[方針 A]

$PA = PB$ を満たす P は線分 AB の垂直二等分線 m 上にあるので, 求めるものは

m と C との交点の x 座標

に他ならない.

m は, 傾き -2 の直線 l と直交するので, 傾き $\frac{1}{2}$ であり, AB の中点

$$\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{9+1}{2} \right) \therefore (-1, 5)$$

を通る. よって, m の式は

$$y = \frac{1}{2}(x+1) + 5 \therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$$

m と C との交点の x 座標は

$$x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$$

の実数解であるから, これを解いて,

$$x = \boxed{\frac{1+\sqrt{89}}{4}, \frac{1-\sqrt{89}}{4}}$$

[方針 B]

P の x 座標を x とおくと, P は C 上の点なので, P の座標は

$$(x, x^2)$$

と表される.

このとき,

$$PA = \sqrt{(x+3)^2 + (x^2-9)^2}$$

$$PB = \sqrt{(x-1)^2 + (x^2-1)^2}$$

であるから, $PA = PB$ を満たすのは

$$\sqrt{(x+3)^2 + (x^2-9)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (x^2-1)^2}$$

$$\therefore (x+3)^2 + (x^2-9)^2 = (x-1)^2 + (x^2-1)^2$$

となるとき.

これを整理すると,

$$x^2 + 6x + 9 + x^4 - 18x^2 + 81$$

$$= x^2 - 2x + 1 + x^4 - 2x^2 + 1$$

$$0 = 16x^2 - 8x - 88$$

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{11}{2} = 0$$

で, 方針 A と同じ方程式となり, これを解いて

$$x = \boxed{\frac{1+\sqrt{89}}{4}, \frac{1-\sqrt{89}}{4}}$$

宿題 1-4

$$(1) \quad N = 74088 = \boxed{2^3 \times 3^3 \times 7^3}$$

(2)

(i) N の正の約数は

$$2^a \times 3^b \times 7^c, \quad \begin{cases} a = 0, 1, 2, 3 \\ b = 0, 1, 2, 3 \\ c = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

の形のものたちなので、

$$4 \times 4 \times 4 = \boxed{64} \text{ 個}$$

あり、これらの和は

$$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)$$

$$\times (3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3)(7^0 + 7^1 + 7^2 + 7^3)$$

の展開式に他ならないので、その値は

$$15 \times 40 \times 400 = \boxed{240000}$$

(ii) N の正の約数のうち、平方数のものは

$$2^a \times 3^b \times 7^c, \quad \begin{cases} a = 0, 2 \\ b = 0, 2 \\ c = 0, 2 \end{cases}$$

の形のものたちなので、

$$2 \times 2 \times 2 = \boxed{8} \text{ 個}$$

あり、これらの和は

$$(2^0 + 2^2)(3^0 + 3^2)(7^0 + 7^2)$$

の展開式に他ならないので、その値は

$$5 \times 10 \times 50 = \boxed{2500}$$

である。

宿題 1-5

(1) 余弦定理より、

$$\cos B = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \times 4 \times 5} = \boxed{\frac{1}{8}}$$

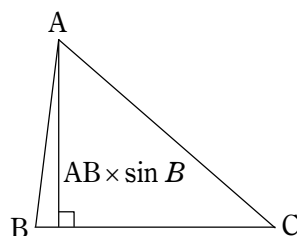
(2) $(\cos B)^2 + (\sin B)^2 = 1$ なので、

$$(\sin B)^2 = 1 - (\cos B)^2 = 1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{63}{64}$$

$$\therefore \sin B = \boxed{\frac{3\sqrt{7}}{8}} \quad (> 0)$$

$$(3) \quad S = \frac{1}{2} \times BC \times AB \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{3\sqrt{7}}{2} = \boxed{\frac{15\sqrt{7}}{4}}$$



(4) 内接円の中心を I とすると、

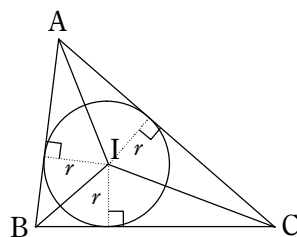
$$S = \triangle IAB + \triangle IBC + \triangle ICA$$

$$= \frac{1}{2} \times AB \times r + \frac{1}{2} \times BC \times r + \frac{1}{2} \times CA \times r$$

$$= \frac{1}{2} \times (4 + 5 + 6) \times r = \frac{15}{2} r$$

なので、

$$\frac{15}{2} r = \frac{15\sqrt{7}}{4} \quad \therefore r = \boxed{\frac{\sqrt{7}}{2}}$$



(5) 正弦定理より,

$$2R \sin B = 6 \quad \therefore R = \frac{3}{\sin B} = \boxed{\frac{8}{\sqrt{7}}}$$

(6) 傍接円の中心を E とすると,

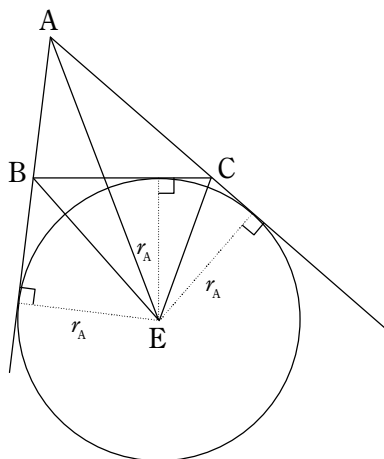
$$S = \triangle EAB + \triangle ECA - \triangle EBC$$

$$= \frac{1}{2} \times AB \times r_A + \frac{1}{2} \times CA \times r_A - \frac{1}{2} \times BC \times r_A$$

$$= \frac{1}{2} \times (4 + 6 - 5) \times r_A = \frac{5}{2} r_A$$

なので,

$$\frac{5}{2} r_A = \frac{15\sqrt{7}}{4} \quad \therefore r_A = \boxed{\frac{3\sqrt{7}}{2}}$$



■ 内接円 I, 傍接円 E と直線 AB の接点をそれぞれ H, K とするとき, 三角形 AIH と AEK は相似で, $r:r_A = AH:AK$ が成り立つ. これを利用して r_A を求めることもできる.

