

中3数学D 宿題解答 2学期-2

宿題 2-1

(1) 商を $Q(x)$ とおくと,

$$f(x) = \underbrace{(x+2)(x^2+2x+3)}_{\star} Q(x)$$

$$+ 2x^2 + 3x + 4$$

と表せる. $R(x) = 2x^2 + 3x + 4$ とおく.

(i) ☆の部分は $x+2$ で割り切れているので,

$f(x)$ を $x+2$ で割った余りは

$R(x)$ を $x+2$ で割った余りに等しく, これを筆算で計算すれば

$$\begin{array}{r} 2x-1 \\ x+2 \overline{) 2x^2+3x+4} \\ \underline{2x^2+4x} \\ -x+4 \\ \underline{-x-2} \\ 6 \end{array}$$

なので, $\boxed{6}$.

➤ 剰余の定理を利用してもよい.

(ii) ☆の部分は x^2+2x+3 で割り切れているので,

$f(x)$ を x^2+2x+3 で割った余りは

$R(x)$ を x^2+2x+3 で割った余りに等しく, これを筆算で計算すれば

$$\begin{array}{r} 2 \\ x^2+2x+3 \overline{) 2x^2+3x+4} \\ \underline{2x^2+4x+6} \\ -x-2 \end{array}$$

なので, $\boxed{-x-2}$.

(2) $g(x)$ を 3 次式 $(x+2)(x^2+2x+3)$ で割った余りは 2 次以下の整式であるから, これを $r(x) = ax^2 + bx + c$ とおく.

商を $q(x)$ とおくと,

$$g(x) = \underbrace{(x+2)(x^2+2x+3)}_{\star} q(x)$$

$$+ ax^2 + bx + c$$

と表せる.

※の部分は $x+2$ で割り切れているので, $g(x)$ を $x+2$ で割った余り 3 は, $r(x)$ を $x+2$ で割った余りに等しく, これを筆算で計算すれば

$$\begin{array}{r} ax+b-2a \\ x+2 \overline{) ax^2+bx+c} \\ \underline{ax^2+2ax} \\ (b-2a)x+c \\ \underline{(b-2a)x+2b-4a} \\ c-2b+4a \end{array}$$

なので,

$$4a-2b+c=3 \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ.

※の部分は x^2+2x+3 で割り切れているので, $g(x)$ を x^2+2x+3 で割った余り $4x+5$ は, $r(x)$ を x^2+2x+3 で割った余りに等しく, これを筆算で計算すれば

$$\begin{array}{r} a \\ x^2+2x+3 \overline{) ax^2+bx+c} \\ \underline{ax^2+2ax+3a} \\ (b-2a)x+c-3a \end{array}$$

なので, 整式としての等式

$$(b-2a)x+c-3a=4x+5$$

が成り立ち,

$$b-2a=4 \cdots \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$c-3a=5 \cdots \cdots \cdots \textcircled{3}$$

①, ②, ③から a, b, c を求めると,

$$a=2, b=8, c=11$$

なので, $r(x) = \boxed{2x^2+8x+11}$.

宿題 2-2

- (1) $f(x)$ を 1 次式 $x-2$ で割った余りは定数であるから、これを R とおく.

商を $Q(x)$ とおくと,

$$f(x) = (x-2)Q(x) + R \cdots \cdots \textcircled{1}$$

と表せる.

- ①に $x=2$ を代入すると,

$$f(2) = R$$

$$\therefore R = 1^{2019} + (-1)^{2019} = 1 - 1 = \boxed{0}$$

➤ 剰余の定理を利用してもよい.

- (2) $f(x)$ を 2 次式 $(x-1)(x-3)$ で割った余りは 1 次以下の整式であるから、これを

$$ax+b$$

とおく. 商を $q(x)$ とおくと,

$$f(x) = (x-1)(x-3)q(x) + ax + b \cdots \cdots \textcircled{2}$$

と表せる.

- ②に $x=1$ を代入すると,

$$f(1) = a + b$$

$$\therefore a + b = 0^{2019} + (-2)^{2019} = -2^{2019} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

- ②に $x=3$ を代入すると,

$$f(3) = 3a + b$$

$$\therefore 3a + b = 2^{2019} + 0^{2019} = 2^{2019} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

- ③, ④から a, b を求める.

- ④ - ③ より,

$$2a = 2^{2019} + 2^{2019} = 2 \times 2^{2019}$$

$$\therefore a = 2^{2019}$$

これと③より

$$b = -2^{2019} - a$$

$$= -2^{2019} - 2^{2019} = -2 \times 2^{2019} = -2^{2020}$$

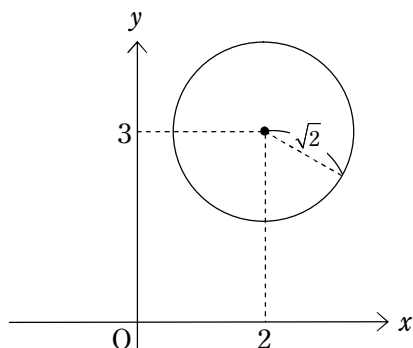
よって、求める余りは

$$\boxed{2^{2019}x - 2^{2020}}$$

宿題 2-3

- (1) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$

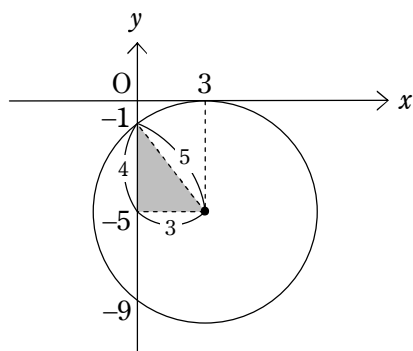
の表す図形は、中心 $(2, 3)$ 、半径 $\sqrt{2}$ の円.



- (2) $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0$

$$\therefore (x-3)^2 + (y+5)^2 = 25$$

の表す図形は、中心 $(3, -5)$ 、半径 5 の円.

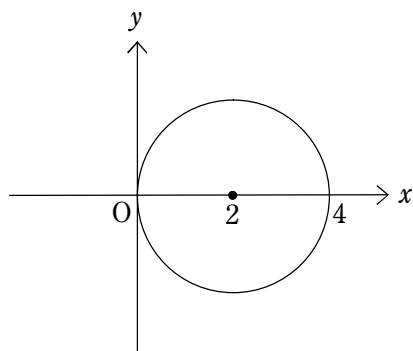


図の直角三角形に注目すれば、 y 切片は $-5+4=-1$, $-5-4=-9$ と分かる.

- (3) $x^2 + y^2 = 4x$

$$\therefore (x-2)^2 + y^2 = 4$$

の表す図形は、中心 $(2, 0)$ 、半径 2 の円.



宿題 2-4

a, b の最大公約数を $\text{GCD}(a, b)$ で書く.

$$\begin{aligned} (1) \quad 391 &= 187 \times 2 + 17 \text{ なので,} \\ \text{GCD}(187, 391) &= \text{GCD}(187, 17) \\ &= \text{GCD}(17 \times 11, 17) \\ &= \boxed{17} \end{aligned}$$

(2) 187 は 2 でも 5 でも割れないので,
 $100 = 2^2 \times 5^2$
 とは共通の素因数を持たない.
 したがって,

$$\begin{aligned} \text{GCD}(187, 39100) \\ &= \text{GCD}(187, 391 \times 100) \\ &= \text{GCD}(187, 391) \end{aligned}$$

であり, (1)よりこれは $\boxed{17}$.

(3) 18700, 3910000 はどちらも 100 の倍数であることに注目すると,

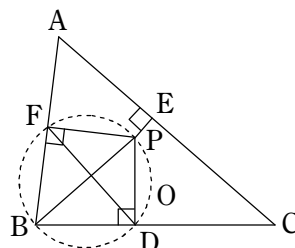
$$\begin{aligned} \text{GCD}(18700, 3910000) \\ &= \text{GCD}(187 \times 100, 39100 \times 100) \\ &= \text{GCD}(187, 39100) \times 100 \end{aligned}$$

なので, (2)より

$$\begin{aligned} &= 17 \times 100 \\ &= \boxed{1700} \end{aligned}$$

宿題 2-5

- (1) $\angle PDB + \angle PFB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$
 なので, 内接四角形の定理の逆により,
 P, B, D, F は同一円周上にある.



- (2) P, B, D, F を通る円を O とすると,
 $\angle PDB = 90^\circ$
 であるから, PB は円 O の直径である.
 O は三角形 BDF の外接円であるから,
 正弦定理より

$$DF = \boxed{PB \sin B} \dots\dots\dots ①$$

- (3) 同様に, P, C, D, E も同一円周上にあり,
 その直径は PC であるから, 三角形 CED
 において正弦定理より,

$$DE = PC \sin C \dots\dots\dots ②$$

が成り立つ.

$DF = DE$ のとき, ①, ②より

$$PB \sin B = PC \sin C$$

$$\therefore PB : PC = \sin C : \sin B$$

三角形 ABC において, 正弦定理より

$$\sin C : \sin B = AB : CA$$

であるから,

$$PB : PC = AB : CA = 4 : 6 = \boxed{2 : 3} \dots\dots ③$$

- (4) 三角形 DEF が正三角形であるとき,
 $DF = DE$

であるから, ③が成り立ち, さらに

$$ED = EF$$

であるから, (3)と同様にして

$$PC : PA = \sin A : \sin C = 5 : 4 \dots\dots\dots ④$$

も成り立つ.

したがって, ③, ④より

$$PA : PB : PC = \frac{4}{5} : \frac{2}{3} : 1 = \boxed{12 : 10 : 15}$$

※ (4)の結果は $PA : PB : PC = \frac{1}{BC} : \frac{1}{CA} : \frac{1}{AB}$
 とも表すことができる.

【宿題 2-5 のおまけ】

(3)より, $DF = DE$ を満たす P は③を満たす. 一方, 夏期講習『図形と式』§2 で計算したように, ③を満たすような点 P はアポロニウスの円と呼ばれる円 (O_A とする) 上を動く.

P として A を取ると③が成り立つので, O_A は A を通ることが分かる.

同様に, $ED = EF$ を満たす P は④を満たすので, やはりある円 O_B 上にあり, O_B は B を通る. $FE = FD$ を満たす P も C を通るようなある円 O_C 上にある.

このとき, O_A と O_B は 2 点で交わっており, O_C はこの 2 交点を通ることが示せる.

(4)で考えた P は, O_A, O_B, O_C の 2 交点のうち, 三角形 ABC の内部にある点となっている. 他方の交点は, 三角形 ABC の外部にあり, これを Q とすると, Q から BC, CA, AB (の延長) に下した垂線の足は正三角形の頂点をなすことが示せる.

三角形 ABC に対して, 3 辺 (の延長) に下した垂線の足が正三角形の頂点となる点は, この P と Q の 2 点となる.

