中3数学D 宿題解答 2学期-3

宿題 3-1

(1) $f(x)=x^3-5x^2-2x+24$ とおく.

定数項 24 の約数を代入していくと

$f(-2)=-8-20+4+24=0$

なので, $f(x)$ は $x+2$ で割り切れて,

$f(x)=(x+2)(x^2-7x+12)$

$=(x+2)(x-3)(x-4)$

したがって, $f(x)=0$ の解は

$\boxed{x=-2,3,4}$

(2) $f(x)=x^3-4x^2-6x+5$ とおく.

定数項 5 の約数を代入していくと

$f(5)=125-100-30+5=0$

なので, $f(x)$ は $x-5$ で割り切れて,

$f(x)=(x-5)(x^2+x-1)$

したがって, $f(x)=0$ の解は

$x-5=0$ または $x^2+x-1=0$

を解いて

$\boxed{x=5,\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}$

(3) $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+4$ とおく.

定数項 4 の約数を代入していくと

$f(1)=1+2-3-4+4=0$

なので, $f(x)$ は $x-1$ で割り切れて,

$f(x)=(x-1)(x^3+3x^2-4)$

次に, $g(x)=x^3+3x^2-4$ とおく.

定数項 -4 の約数を代入していくと

$f(1)=1+3-4=0$

よって, $g(x)$ も $x-1$ で割り切れて,

$g(x)=(x-1)(x^2+4x+4)$

$=(x-1)(x+2)^2$

$\therefore f(x)=(x-1)\times(x-1)(x+2)^2$

$=(x-1)^2(x+2)^2$

したがって, $f(x)=0$ の解は

$\boxed{x=1,-2}$

宿題 3-2

点 (x,y) が C と D の交点になるのは, (x,y) が連立方程式

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=5 & \cdots\cdots ①\\ y=x^2 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

の解となるときに他ならない.

②を①に代入して

$(x-1)^2+(x^2-2)^2=5$

$x^4-3x^2-2x=0$

$x(x^3-3x-2)=0$ ……③

ここで, $f(x)=x^3-3x-2$ とおくと,

$f(-1)=-1+3-2=0$

なので, $f(x)$ は $x+1$ で割り切れて,

$f(x)=(x+1)(x^2-x-2)$

$=(x+1)(x+1)(x-2)$

$=(x+1)^2(x-2)$

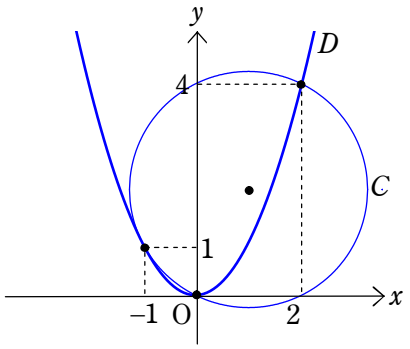
したがって, ③の解は

$x(x+1)^2(x-2)=0$ $\therefore x=0,-1,2$.

それぞれの場合に, ②で y の値を計算して, 交点の座標は

$\boxed{(0,0),(-1,1),(2,4)}$

※ C と D を図示すると下図のようになっており, C と D は点 $(-1,1)$ で「接して」いる.



宿題 3-3

［方針 A］

C の式を

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

とおくと，A(1,1)，B(3,2)，C(9,10) を通るので

$$\begin{cases} 1^2+1^2+a+b+c=0 \\ 3^2+2^2+3a+2b+c=0 \\ 9^2+10^2+9a+10b+c=0 \end{cases}$$

が成り立つ．これを解いて

$$a=8, b=-27, c=17$$

よって，$\boxed{x^2+y^2+8x-27y+17=0}$．

［方針 B］

A, B, C を通る円の中心は，三角形 ABC の外心であり，3 辺の垂直二等分線の交点である．AB, BC の垂直二等分線の式を求めると，それぞれ

AB の垂直二等分線：$y=-2x+\dfrac{11}{2}$

BC の垂直二等分線：$y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{21}{2}$

なので，交点の座標を計算すると，

$$\left(-4, \frac{27}{2}\right)$$

この点を中心として，A(1,1) を通る円の式が求めるものだから，

$$(x+4)^2+\left(y-\frac{27}{2}\right)^2=(1+4)^2+\left(1-\frac{27}{2}\right)^2$$

$$\therefore \boxed{(x+4)^2+\left(y-\frac{27}{2}\right)^2=\frac{725}{4}}$$

宿題 3-4

a, b の最大公約数を $\mathrm{GCD}(a, b)$ で書く．

(1) $\mathrm{GCD}(a, b)=\mathrm{GCD}(a-b, b)$ を用いて，

$$\begin{aligned} &\mathrm{GCD}(999999, 999999999) \\ &=\mathrm{GCD}(999999, 999000000) \\ &=\mathrm{GCD}(999999, 999\times 1000000) \end{aligned}$$

$999999=1000000-1$ と 1000000 は共通の素因数をもたないので，

$$\begin{aligned} &=\mathrm{GCD}(999999, 999) \\ &=\mathrm{GCD}(999\times 1001, 999) \\ &=\boxed{999} \end{aligned}$$

(2) $\mathrm{GCD}(a, b)=\mathrm{GCD}(a-b, b)$ を用いて，

$$\begin{aligned} &\mathrm{GCD}(10^{21}-1, 10^{14}-1) \\ &=\mathrm{GCD}(10^{21}-10^{14}, 10^{14}-1) \\ &=\mathrm{GCD}\left((10^7-1)\times 10^{14}, 10^{14}-1\right) \end{aligned}$$

10^{14} と $10^{14}-1$ は共通の素因数をもたないので，

$$\begin{aligned} &=\mathrm{GCD}(10^7-1, 10^{14}-1) \\ &=\mathrm{GCD}\left(10^7-1, (10^7-1)(10^7+1)\right) \\ &=\boxed{10^7-1\ (=9999999)} \end{aligned}$$

※ 指数を用いて表しているだけで，(1)と同様の計算をしていることに注意．

(3) $\mathrm{GCD}(a, b)=\mathrm{GCD}(a-b, b)$ を用いて，

$$\begin{aligned} &\mathrm{GCD}(2^{39}-1, 2^{26}-1) \\ &=\mathrm{GCD}(2^{39}-2^{26}, 2^{26}-1) \\ &=\mathrm{GCD}\left((2^{13}-1)\times 2^{26}, 2^{26}-1\right) \end{aligned}$$

2^{26} と $2^{26}-1$ は共通の素因数をもたないので，

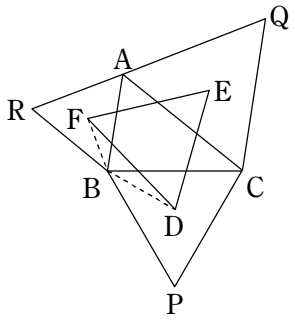
$$\begin{aligned} &=\mathrm{GCD}(2^{13}-1, 2^{26}-1) \\ &=\mathrm{GCD}\left(2^{13}-1, (2^{13}-1)(2^{13}+1)\right) \\ &=\boxed{2^{13}-1\ (=8191)} \end{aligned}$$

※ $2^{39}-1, 2^{26}-1$ を 2 進法で表せば

$$\underbrace{1111\cdots 1}_{39} \quad \text{と} \quad \underbrace{1111\cdots 1}_{26}$$

であるので，これもやはり(1)と同じ問題と言える．

宿題 3-5



(1) 三角形 ABC において，余弦定理より

$$\cos B = \frac{5^2+7^2-8^2}{2\cdot 5\cdot 7} = \boxed{\frac{1}{7}}$$

(2) したがって（$\sin B > 0$ より）

$$\sin B = \sqrt{1-\cos^2 B} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

であり，

$$\angle \mathrm{FBD} = \angle \mathrm{FBA} + B + \angle \mathrm{CBD}$$
$$= 30^\circ + B + 30^\circ = B + 60^\circ$$

なので，加法定理より

$$\cos\angle \mathrm{FBD}$$
$$= \cos(B+60^\circ)$$
$$= \cos B\cos 60^\circ - \sin B \sin 60^\circ$$
$$= \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2} - \frac{4\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{-\frac{11}{14}}$$

(3) 三角形 FAB は $\angle \mathrm{FAB} = \angle \mathrm{FBA} = 30^\circ$ の二等辺三角形で，

$$\mathrm{BF} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{BA} = \frac{5}{\sqrt{3}}$$

三角形 DBC も同様で，

$$\mathrm{BD} = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{BC} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

三角形 FBD で余弦定理より，

$$\mathrm{FD}^2$$
$$= \mathrm{BF}^2 + \mathrm{BD}^2 - 2\,\mathrm{BF}\cdot\mathrm{BD}\cos\angle \mathrm{FBD}$$
$$= \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\cdot\frac{5}{\sqrt{3}}\cdot\frac{7}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{11}{14}\right)$$
$$= \frac{74}{3} + \frac{55}{3} = 43$$

$$\therefore \mathrm{FD} = \boxed{\sqrt{43}}\ (>0)$$

(4) 同様にして，DE, EF も計算すると，

DE：

$$\cos C = \frac{7^2+8^2-5^2}{2\cdot 7\cdot 8} = \frac{11}{14},\ \sin C = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$\cos\angle \mathrm{DCE} = \frac{11}{14}\cdot\frac{1}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{14}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{7}$$

より，

$$\mathrm{DE}^2$$
$$= \left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\cdot\frac{7}{\sqrt{3}}\cdot\frac{8}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)$$
$$= \frac{113}{3} + \frac{16}{3} = 43$$

$$\therefore \mathrm{DE} = \sqrt{43}$$

EF：

$$\cos A = \frac{8^2+5^2-7^2}{2\cdot 8\cdot 5} = \frac{1}{2} \quad \therefore A = 60^\circ$$

$$\cos\angle \mathrm{EAF} = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

より，

$$\mathrm{EF}^2$$
$$= \left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\cdot\frac{8}{\sqrt{3}}\cdot\frac{5}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{89}{3} + \frac{40}{3} = 43$$

$$\therefore \mathrm{EF} = \sqrt{43}$$

よって，$\mathrm{DE} = \mathrm{EF} = \mathrm{FD}$ となり，三角形 DEF は正三角形である．

※ 1 学期『三角比と図形』の C6-2, I) にあたる問題です．

※ どのような三角形 ABC に対しても，本問のように正三角形 PBC, QCA, RAB を取り，それらの重心を D, E, F とすると，三角形 DEF は正三角形になることが知られている（ナポレオンの定理）．