

中3数学D 宿題解答 2学期-4

宿題 4-1

- (1) $x^2 + 4x + 2 = 0$ の解が $x = \alpha, \beta$ なので、

$$x^2 + 4x + 2 = (x - \alpha)(x - \beta)$$

と因数分解できる.

右辺を展開すると、 x の整式の等式

$$x^2 + 4x + 2 = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

を得るので、

- (i) 係数を比較して、

$$\boxed{\alpha + \beta = -4, \alpha\beta = 2}$$

- (ii) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ を 2 解にもつ、 x の 2 次方程式として

$$\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)\left(x - \frac{1}{\beta}\right) = 0$$

がある. これを展開すると

$$x^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)x + \frac{1}{\alpha\beta} = 0$$

$$\therefore x^2 - \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}x + \frac{1}{\alpha\beta} = 0$$

なので、(i)の結果を代入して

$$x^2 - \frac{-4}{2}x + \frac{1}{2} = 0$$

分母を払って整数係数とすると

$$\boxed{2x^2 + 4x + 1 = 0}$$

- (2) $x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 0$ の解が $x = \alpha, \beta, \gamma$ なので、

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

と因数分解できる.

右辺を展開すると、 x の整式の等式

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 5$$

$$= x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma$$

を得るので、

- (i) 係数を比較して、

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 3, \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma &= -2, \alpha\beta\gamma = -5 \end{aligned}}$$

- (ii) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ を 3 解にもつ、 x の 3 次方程式として

$$\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)\left(x - \frac{1}{\beta}\right)\left(x - \frac{1}{\gamma}\right) = 0$$

がある. これを展開すると

$$\begin{aligned} x^3 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)x^2 \\ + \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma}\right)x - \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore x^3 - \frac{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}x^2$$

$$+ \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\alpha\beta\gamma}x - \frac{1}{\alpha\beta\gamma} = 0$$

なので、(i)の結果を代入して

$$x^3 - \frac{-2}{-5}x^2 + \frac{3}{-5}x - \frac{1}{-5} = 0$$

分母を払って整数係数とすると

$$\boxed{5x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0}$$

※ (1)(2)ともに、はじめの方程式の係数を逆に並べた方程式になっていることに気づく. これは偶然だろうか.

宿題 4-2

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0) \dots\dots\dots ①$$

- (1) d を D と誤って解き、解 $x=1, 2, -3$ を得たとすると、

$$ax^3 + bx^2 + cx + D = 0$$

の解が $x=1, 2, -3$ なので、

$$ax^3 + bx^2 + cx + D = a(x-1)(x-2)(x+3)$$

と因数分解できる。

右辺を展開すると、 x の整式の等式

$$ax^3 + bx^2 + cx + D = ax^3 - 7ax + 6a$$

を得るので、係数を比較して、

(i) $b = \boxed{0}$

(ii) $c = \boxed{-7a}$

- (2) (1)より、方程式①は

$$ax^3 - 7ax + d = 0 \dots\dots\dots ②$$

となる。

これが $x=-2$ を解にもつので、

$$-8a + 14a + d = 0 \quad \therefore d = -6a$$

したがって、②はさらに

$$ax^3 - 7ax - 6a = 0$$

となる。

$a \neq 0$ であるから、両辺を a で割って

$$x^3 - 7x - 6 = 0$$

$x=-2$ を解にもつことに注意して左辺を因数分解すると、

$$(x+2)(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$(x+2)(x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -2, -1, 3$$

よって、残りの 2 解は $x = \boxed{-1, 3}$ 。

※ B 先生は定数項の符号を間違えたことが分かります。

宿題 4-3

$P(x, y)$ に対して、

$$AP = \sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

$$BP = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$$

- (1) $P(x, y)$ が

$$AP:BP = 1:1 \dots\dots\dots ①$$

を満たすのは、

$$AP = BP$$

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$$

$$x^2 + (y-2)^2 = (x-4)^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = x^2 - 8x + 16 + y^2$$

$$8x - 4y = 12$$

$$\therefore \boxed{2x - y = 3}$$

のとき。これが求める軌跡の式である。

※ もちろん、軌跡は AB の垂直二等分線である。このことを用いて軌跡の式を求めてもよい。

- (2) $P(x, y)$ が

$$AP:BP = 1:2$$

を満たすのは、

$$2AP = BP$$

$$2\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$$

$$4\{x^2 + (y-2)^2\} = (x-4)^2 + y^2$$

$$4(x^2 + y^2 - 4y + 4) = x^2 - 8x + 16 + y^2$$

$$4x^2 + 4y^2 - 16y + 16 = x^2 - 8x + 16 + y^2$$

$$3x^2 + 3y^2 + 8x - 16y = 0$$

$$\therefore \boxed{x^2 + y^2 + \frac{8}{3}x - \frac{16}{3}y = 0}$$

のとき。これが求める軌跡の式である。

※ この式を平方完成すると

$$\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{80}{9}$$

なので、これは中心 $\left(-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$ 、半径 $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ の円を表す (アポロニウスの円)。

宿題 4-4

$$79x + 34y = 1 \quad \text{..... ①}$$

$$(1) \quad 79 = 34 \times 2 + 11 \quad \text{..... ②}$$

$$34 = 11 \times 3 + 1 \quad \text{..... ③}$$

$$11 = 1 \times 11 + 0$$

(2) ②より

$$11 = 79 - 34 \times 2 \quad \text{..... ④}$$

なので, ③に代入して,

$$34 = (79 - 34 \times 2) \times 3 = 1$$

$$-79 \times 3 + 34 \times 7 = 1 \quad \text{..... ⑤}$$

したがって, ①の整数解として

$$(x, y) = (-3, 7)$$

が求まる.

(3) ①の整数解 (x, y) に対して, ⑤より

$$79x + 34y = -79 \times 3 + 34 \times 7$$

$$\therefore 79(x+3) = 34(-y+7) \quad \text{..... ⑥}$$

を得る.

⑥より, $34(-y+7)$ は素数 79 で割り切れるが, 34 は 79 では割り切れないので, $-y+7$ が 79 で割り切れる. この商を k とおくと, k は整数であり,

$$-y+7 = 79k \quad \therefore y = -79k+7$$

これを⑥に代入して,

$$79(x+3) = 34 \times 79k$$

$$x+3 = 34k$$

$$\therefore x = 34k-3$$

よって,

$$(x, y) = (34k-3, -79k+7)$$

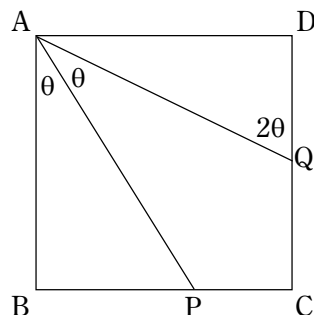
と表せる.

この (x, y) は整数 k の値によらず, ①を満たす整数の組を与えるので,

$$(x, y) = (34k-3, -79k+7), k \text{ は整数}$$

が①の整数解のすべてである.

宿題 4-5



(1) 加法定理より,

$$\cos 2\theta = \cos(\theta + \theta)$$

$$= \cos \theta \cos \theta - \sin \theta \sin \theta$$

$$= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin 2\theta = \sin(\theta + \theta)$$

$$= \sin \theta \cos \theta + \cos \theta \sin \theta$$

$$= 2 \sin \theta \cos \theta$$

となることを利用して,

$$(i) \quad BP = AB \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$(ii) \quad AQ = \frac{AD}{\sin 2\theta} = \frac{1}{2 \sin \theta \cos \theta}$$

$$(iii) \quad QD = \frac{AD}{\tan 2\theta} = \frac{1}{\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}}$$

$$= \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{2 \sin \theta \cos \theta}$$

(2) (1)の結果より,

$$BP + QD = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{2 \sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{2 \sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{2 \sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{2 \sin \theta \cos \theta} = AQ$$

(q.e.d.)