

中3数学D 宿題解答 2学期-5

宿題 5-1

α, β, γ を3解にもつ x の3次方程式として
 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$ ☆

を考える. 左辺を展開すると

$x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma$
 であるから,

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 5 \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 3 \\ \alpha\beta\gamma = -1 \end{cases}$$

を代入して, ☆は

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$$

となる.

これを解くと,

$$(x-1)(x^2 - 4x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 1, 2 \pm \sqrt{5}$$

この3数が α, β, γ であるから, $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ に注意して,

$$\boxed{\alpha = 2 - \sqrt{5}, \beta = 1, \gamma = 2 + \sqrt{5}}$$

宿題 5-2

$x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 0$ の解が $x = \alpha, \beta, \gamma$ なので,
 方程式の左辺は

$$x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

と因数分解できる.

右辺を展開すると, x の整式としての等式

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + 3x + 1 \\ = x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

を得るので, 係数を比較して,

$$\begin{cases} -(\alpha + \beta + \gamma) = -4 \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 3 \\ -\alpha\beta\gamma = 1 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 4 \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 3 \\ \alpha\beta\gamma = -1 \end{cases}$$

を得る. よって,

$$(1) \quad \boxed{\alpha + \beta + \gamma = 4}$$

$$(2) \quad \boxed{\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 3}$$

$$(3) \quad \boxed{\alpha\beta\gamma = -1}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \\ & = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) \\ & = 4^2 - 2 \times 3 = \boxed{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad & A = \alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\alpha + \beta^2\gamma + \gamma^2\alpha + \gamma^2\beta \\ & \text{とおくと,} \\ & (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = A + 3\alpha\beta\gamma \\ & \text{なので,} \\ & A = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) - 3\alpha\beta\gamma \\ & = 4 \times 3 - 3 \times (-1) = \boxed{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \quad & (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + A \\ & \text{なので,} \\ & \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - A \\ & = 4 \times 10 - 15 = \boxed{25} \end{aligned}$$

宿題 5-3

- (1) D は C 上の点 $(2, 1)$ を中心とし, C の内部の点 $(2, 0)$ を通るので, C, D は確かに 2 点で交わることに注意.

交点 A, B の座標を (x, y) とすると, x, y は連立方程式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y = -4 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

の解であるから,

$$\textcircled{1} - \textcircled{2}: 4x + 2y = 9 \cdots \cdots \cdots \textcircled{3}$$

の解でもある.

このことは, $\textcircled{3}$ の表す直線が A, B を通ることであり, 2 点 A, B を通る直線は一つに決まるので, 求める直線の式は

$$\boxed{4x + 2y = 9}$$

- (2) A, B の座標は連立方程式 $\begin{cases} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{cases}$ の解である

から, 定数項を消去して得られる

$$\textcircled{1} \times 4 + \textcircled{2} \times 5:$$

$$9x^2 + 9y^2 - 20x - 10y = 0 \cdots \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$x^2 + y^2 - \frac{20}{9}x - \frac{10}{9}y = 0$$

$$\therefore \boxed{\left(x - \frac{10}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{9}\right)^2 = \frac{125}{81}} \cdots \cdots \cdots \textcircled{5}$$

の解でもある.

このことは, $\textcircled{5}$ の表す円が A, B を通ることである. また, $x=0, y=0$ は定数項のない $\textcircled{4}$ を満たすことが即座に分かるので, この円は原点も通っていて, $\textcircled{5}$ の表す円は A, B, O を通る. 3 点 A, B, O を通る円は一つに決まるので, 求める円の式は $\textcircled{5}$ である.

宿題 5-4

- (1) $6 \equiv -1 \pmod{7}$ なので,

$$6^{100} \equiv (-1)^{100} \equiv 1 \pmod{7}$$

よって, 余りは $\boxed{1}$.

- (2) $\text{mod } 7$ で

$$5^2 \equiv 25 \equiv 4$$

$$5^3 \equiv 5 \times 5^2 \equiv 5 \times 4 \equiv 20 \equiv -1$$

であるから,

$$5^{100} \equiv (5^3)^{33} \times 5^1$$

$$\equiv (-1)^{33} \times 5$$

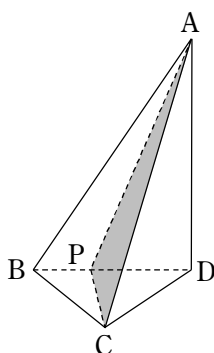
$$\equiv -5$$

$$\equiv 2 \pmod{7}$$

よって, 余りは $\boxed{2}$.

宿題 5-5

$$BC = CD = DB = 2, AB = AC = 4, AD = 2\sqrt{3}$$



AB:BD:AD=AC:CD:AD=2:1: $\sqrt{3}$
 なので、三角形 ABD, ACD はともに
 30°, 60°, 90°
 の三角定規の形であり、特に
 AD ⊥ BC, AD ⊥ CD
 である。

(1)

- (i) 三角形 APD において、ピタゴラスの定理より

$$PA^2 = AD^2 + PD^2 = (2\sqrt{3})^2 + x^2$$

$$\therefore PA = \sqrt{x^2 + 12} \quad (> 0)$$

- (ii) 三角形 BCD は正三角形なので、
 $\angle BDC = 60^\circ$

よって、三角形 CPD において余弦定理より、

$$PC^2 = CD^2 + PD^2 - 2 \cdot CD \cdot PD \cos 60^\circ$$

$$= 2^2 + x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2}$$

$$= x^2 - 2x + 4$$

$$\therefore PC = \sqrt{x^2 - 2x + 4} \quad (> 0)$$

- (iii) 三角形 PAC において、余弦定理より、
 $\cos \angle PAC$

$$= \frac{PA^2 + AC^2 - PC^2}{2PA \cdot AC}$$

$$= \frac{(x^2 + 12) + 4^2 - (x^2 - 2x + 4)}{2\sqrt{x^2 + 12} \cdot 4}$$

$$= \frac{2x + 24}{8\sqrt{x^2 + 12}} = \frac{x + 12}{4\sqrt{x^2 + 12}}$$

したがって、

$$(\sin \angle PAC)^2$$

$$= 1 - (\cos \angle PAC)^2$$

$$= 1 - \frac{(x + 12)^2}{16(x^2 + 12)} = \frac{15x^2 - 24x + 48}{16(x^2 + 12)}$$

$$\therefore \sin \angle PAC = \frac{\sqrt{15x^2 - 24x + 48}}{4\sqrt{x^2 + 12}} \quad (> 0)$$

よって、

$$S = \frac{1}{2} AP \cdot AC \sin \angle PAC$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 + 12} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{15x^2 - 24x + 48}}{4\sqrt{x^2 + 12}}$$

$$= \frac{\sqrt{15x^2 - 24x + 48}}{2}$$

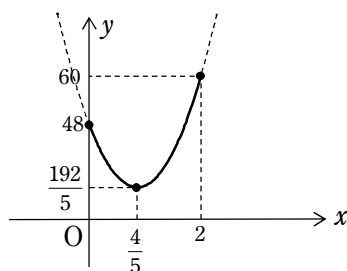
- (2) S が最小になるのは、

$$15x^2 - 24x + 48 \quad (= f(x) \text{ とおく})$$

が最小になるときである。

$$y = f(x) = 15 \left(x - \frac{4}{5} \right)^2 + \frac{192}{5}$$

なので、 $0 \leq x \leq 2$ に注意して、グラフは、
 下図のよう。



グラフより、 $f(x)$ の最小値は、 $x = \frac{4}{5}$ の

ときの $\frac{192}{5}$ であり、このとき S も最小値

$$\frac{\sqrt{192}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{15}}{5}$$

となる。