

中3数学D 宿題解答 2学期-6

宿題 6-1

- (1) $g(x) = f(x) - 1$ とおくと,

$$g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = 0$$

であるから, 因数定理より, $g(x)$ は

$$h(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

で割り切れる.

ところが, $f(x)$ が 3 次以下の整式であることより, $g(x)$ も 3 次以下の整式であるから, $g(x)$ を 4 次式 $h(x)$ で割った商は 0 であり,

$$g(x) = 0 \times h(x) = 0$$

となる.

$$\text{したがって, } f(x) - 1 = 0 \quad \therefore f(x) = \boxed{1}$$

- (2) $g(x) = f(x) - 1$ とおくと,

$$g(1) = g(2) = g(3) = 0$$

であるから, 因数定理より, $g(x)$ は

$$h(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

で割り切れる.

$f(x)$ が 3 次以下の整式であることより, $g(x)$ も 3 次以下の整式であるから, $g(x)$ を 3 次式 $h(x)$ で割った商は定数であり, これを k とおくと

$$g(x) = k h(x)$$

$$f(x) - 1 = k(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$\therefore f(x) = k(x-1)(x-2)(x-3) + 1$$

となる. いま, $f(4) = 2$ であるから, 両辺に $x = 4$ を代入して

$$2 = 6k + 1 \quad \therefore k = \frac{1}{6}$$

したがって,

$$f(x) = \boxed{\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3) + 1}$$

- (3) $g(x) = f(x) - (2x-1)$ とおくと,

$$g(2) = g(3) = g(4) = 0$$

であるから, 因数定理より, $g(x)$ は

$$h(x) = (x-2)(x-3)(x-4)$$

で割り切れる.

$f(x)$ が 3 次以下の整式であることより, $g(x)$ も 3 次以下の整式であるから, $g(x)$ を 3 次式 $h(x)$ で割った商は定数であり, これを k とおくと

$$g(x) = k h(x)$$

$$f(x) - (2x-1) = k(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$\therefore f(x) = k(x-2)(x-3)(x-4) + 2x - 1$$

となる. いま, $f(1) = 2$ であるから, 両辺に $x = 1$ を代入して

$$2 = -6k + 1 \quad \therefore k = -\frac{1}{6}$$

したがって,

$$f(x) = \boxed{-\frac{1}{6}(x-2)(x-3)(x-4) + 2x - 1}$$

宿題 6-2

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3 + px^2 + qx + r$$

とおくと、 $x=1, 2, 3$ を代入して、

$$\begin{cases} (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma) = 1 + p + q + r \\ (2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma) = 8 + 4p + 2q + r \\ (3-\alpha)(3-\beta)(3-\gamma) = 27 + 9p + 3q + r \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} p + q + r = 23 \\ 4p + 2q + r = 10 \\ 9p + 3q + r = -19 \end{cases}$$

であるから、これを解いて、

$$p = -8, q = 11, r = 20$$

したがって、

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3 - 8x^2 + 11x + 20$$

であるから、 α, β, γ は方程式

$$x^3 - 8x^2 + 11x + 20 = 0$$

の3解である。

これを解くと、

$$x^3 - 8x^2 + 11x + 20 = 0$$

$$(x+1)(x^2 - 9x + 20) = 0$$

$$(x+1)(x-4)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = -1, 4, 5$$

$$\alpha \leq \beta \leq \gamma \text{ に注意して, } \boxed{\alpha = -1, \beta = 4, \gamma = 5}.$$

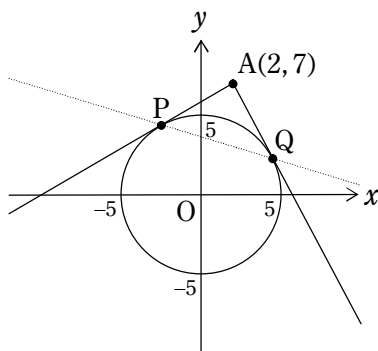
宿題 6-3

$$C: x^2 + y^2 = 25 \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$

は原点 O 中心、半径 $r=5$ の円である。

(1) $\angle APO = \angle AQO = 90^\circ$ なので、

$$AP = AQ = \sqrt{AO^2 - r^2} = \sqrt{2^2 + 7^2 - 5^2} = \boxed{2\sqrt{7}}$$



(2) P, Q は A を中心とする半径 $2\sqrt{7}$ の円 D

$$(x-2)^2 + (y-7)^2 = 28$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 4x - 14y = -25 \cdots \cdots \cdots \textcircled{2}$$

と C との2交点である。よって、 P, Q の座標は、連立方程式

$$\therefore \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \cdots \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x^2 + y^2 - 4x - 14y = -25 \cdots \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

の解であるから、

① - ②:

$$4x + 14y = 50 \quad \therefore \boxed{2x + 7y = 25} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

の解でもある。

このことは、③の表す直線が P, Q を通るということであり、2点 P, Q を通る直線は一つに決まるので、直線 PQ の式は③である。

(3) (1)(2)と同様にして、 A の座標が (a, b) のとき、直線 PQ の式は

$$ax + by = 25 \cdots \cdots \cdots \textcircled{4}$$

となることが分かる (略)。

いま、 a, b は

$$2a + 3b = 25$$

を満たしながら動くので、 $(x, y) = (2, 3)$ は④式を満たす。すなわち、直線 PQ は必ず定点 $\boxed{(2, 3)}$ を通る。

宿題 6-4

- (1) $4^3 \equiv 64 \equiv 1 \pmod{7}$ なので,

$$4^{100} \equiv (4^3)^{33} \times 4^1$$

$$\equiv 1^{33} \times 4$$

$$\equiv 4 \pmod{7}$$

よって、余りは $\boxed{4}$.

- (2) $4^3 \equiv 64 \equiv -1 \pmod{13}$ なので,

$$4^{100} \equiv (4^3)^{33} \times 4^1$$

$$\equiv (-1)^{33} \times 4 \equiv -4$$

$$\equiv 9 \pmod{13}$$

よって、余りは $\boxed{9}$.

- (3) 4^{100} を 13 で割った商を k とおくと, (2) より, 余りは 9 なので,

$$4^{100} = 13k + 9$$

したがって, k を 7 で割った余り (あるいは $\pmod{7}$ での k の値) が分かれば, 4^{100} を 91 で割った余りが分かる.

- (1) より, $4^{100} \equiv 4 \pmod{7}$ であるから,

$$13k + 9 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$13k \equiv -5 \pmod{7}$$

$$-k \equiv -5 \pmod{7}$$

$$\therefore k \equiv 5 \pmod{7}$$

が成り立ち,

$$k = 7l + 5, \quad l \text{ は整数}$$

と表すことができる.

$$4^{100} = 13k + 9$$

$$= 13(7l + 5) + 9$$

$$= 91l + 74$$

したがって, 4^{100} を 91 で割った余りは

$\boxed{74}$.

宿題 6-5

$f(x) = x^2 - 2mx - 2m + 8$ とおき, $y = f(x)$ のグラフを考える.

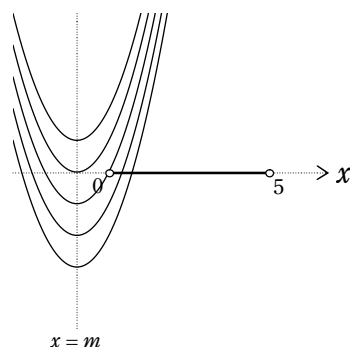
$$f(x) = (x - m)^2 - m^2 - 2m + 8$$

より, グラフは下に凸な放物線であり, 頂点の座標は $(m, -m^2 - 2m + 8)$ である.

- (1) $f(x) = 0$ が $0 < x < 5$ に重解の場合も含めて 2 つの実数解をもつのは, $y = f(x)$ のグラフが x 軸の $0 < x < 5$ の区間と, 2 つの交点をもつか, 接する場合である.

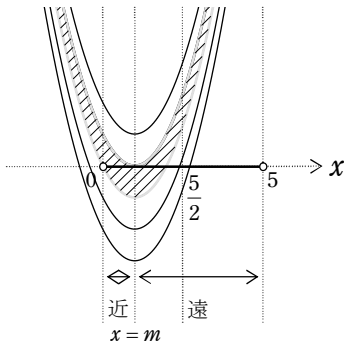
$y = f(x)$ の頂点の x 座標と $0 < x < 5$ の区間との位置関係に注目して, 次のように場合分けして考える.

A) $m \leq 0$ の場合



条件を満たすことはない.

B) $0 < m \leq \frac{5}{2}$ の場合



条件を満たすのは、

$$\begin{cases} [\text{頂点の } y \text{ 座標}] \leq 0 & \dots\dots\dots ① \\ f(0) > 0 & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

のときである。

①より、

$$\begin{aligned} -m^2 - 2m + 8 &\leq 0 & m^2 + 2m - 8 &\geq 0 \\ (m+4)(m-2) &\geq 0 & \therefore m &\leq -4, 2 \leq m \end{aligned}$$

②より、

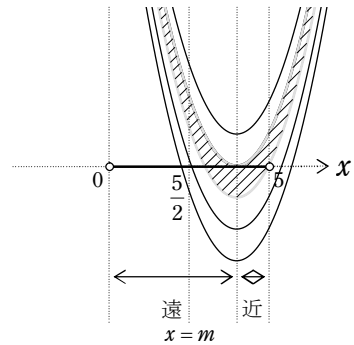
$$-2m + 8 > 0 \quad \therefore m < 4$$

よって、①かつ②となるのは $2 \leq m < 4$

の範囲であるが、いま $0 < m \leq \frac{5}{2}$ の範囲

で考えているので、B)の場合で条件を満たすのは $2 \leq m \leq \frac{5}{2}$ のときである。

C) $\frac{5}{2} \leq m < 5$ の場合



条件を満たすのは、

$$\begin{cases} [\text{頂点の } y \text{ 座標}] \leq 0 & \dots\dots\dots ① \\ f(5) > 0 & \dots\dots\dots ③ \end{cases}$$

のときである。

①より、 $m \leq -4, 2 \leq m$

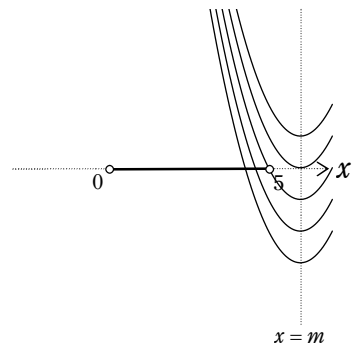
③より、 $-12m + 33 > 0 \quad \therefore m < \frac{11}{4}$

よって、①かつ③となるのは $2 \leq m < \frac{11}{4}$

の範囲であり、いま $\frac{5}{2} \leq m < 5$ の範囲で

考えているので、C)の場合で条件を満たすのは $\frac{5}{2} \leq m < \frac{11}{4}$ のときである。

D) $5 \leq m$ の場合



条件を満たすことはない。

以上 A), B), C), D)より、求める m の範囲

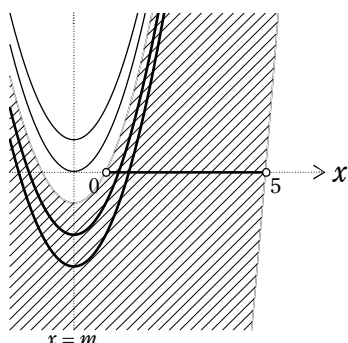
は $\boxed{2 \leq m < \frac{11}{4}}$ である、

(2) $f(x)=0$ が $0 < x < 5$ に少なくとも 1 つ実数解をもつのは、 $y=f(x)$ のグラフが x 軸の $0 < x < 5$ の区間と、少なくとも 1 つの共有点をもつ場合である。

(1)と同様に、 $y=f(x)$ の頂点の x 座標と $0 < x < 5$ の区間との位置関係に注目して、次のように場合分けして考える。

※ 以下、(1)と同じ式には同じ番号を振っている。

a) $m \leq 0$ の場合



条件を満たすのは、

$$\begin{cases} f(0) < 0 \cdots \cdots \textcircled{4} \\ f(5) > 0 \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

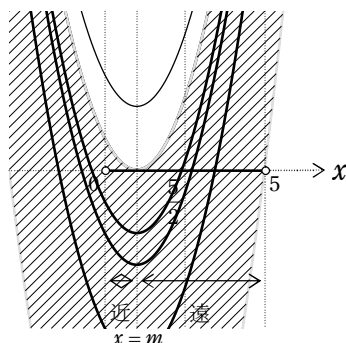
のときである。

④より、 $-2m+8 < 0 \quad \therefore m > 4$

③より、 $m < \frac{11}{4}$

したがって、④かつ③を満たす m は存在しない。

b) $0 < m \leq \frac{5}{2}$ の場合



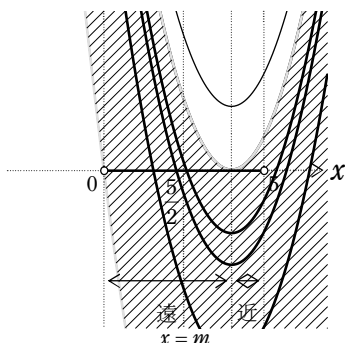
条件を満たすのは、

$$\begin{cases} [\text{頂点の } y \text{ 座標}] \leq 0 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ f(5) > 0 \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

のときである。

(1) C)の途中計算より、①かつ③となるのは $2 \leq m < \frac{11}{4}$ の範囲で、いま $0 < m \leq \frac{5}{2}$ の範囲で考えているので、b)の場合で条件を満たすのは $\underline{2 \leq m \leq \frac{5}{2}}$ のときである。

c) $\frac{5}{2} \leq m < 5$ の場合



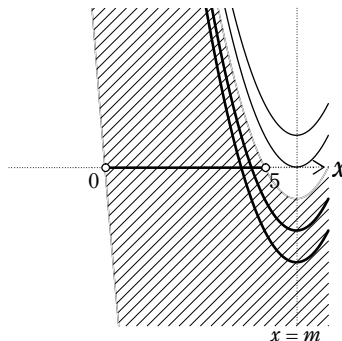
条件を満たすのは,

$$\begin{cases} [\text{頂点の } y \text{ 座標}] \leq 0 & \dots\dots\dots ① \\ f(0) > 0 & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

のときである.

(1) B)の途中計算より, ①かつ③となるのは $2 \leq m < 4$ の範囲で, いま $\frac{5}{2} \leq m < 5$ の範囲で考えているので, c)の場合で条件を満たすのは $\frac{5}{2} \leq m < 4$ のときである.

d) $5 \leq m$ の場合



条件を満たすのは,

$$\begin{cases} f(0) > 0 & \dots\dots\dots ② \\ f(5) < 0 & \dots\dots\dots ⑤ \end{cases}$$

のときである.

②より, $m < 4$

⑤より, $-12m + 33 < 0 \quad \therefore m > \frac{11}{4}$

よって, ②かつ⑤となるのは $\frac{11}{4} < m < 4$

のときであり, いま $5 \leq m$ の範囲で考えているので, d)の場合で条件を満たす m は存在しない.

以上 a), b), c), d)より, 求める m の範囲は

$$\boxed{2 \leq m < 4} \text{ である,}$$