

－ 中3C 宿題プリント (2 学期-7) 解答－

宿題 7-1

次の関数のグラフを描け。x 切片, y 切片を記入すること。
(それぞれを別な xy 平面に図示すること。)

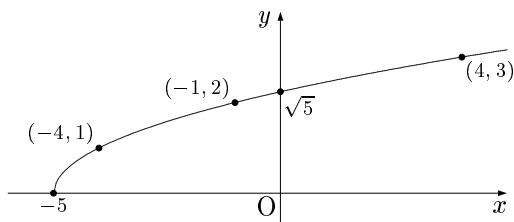
(1) $y = \sqrt{x+5}$

(2) $y = |x^2 - 3|$

- (1) $\sqrt{\quad}$ の中身は 0 以上でなければならないので、
 $x+5 \geq 0$ すなわち、 $x \geq -5$ である。

x	-5	-4	-1	0	4
$\sqrt{x+5}$	0	1	2	$\sqrt{5}$	3

上表より、 $y = \sqrt{x+5}$ のグラフは、下図のよう。



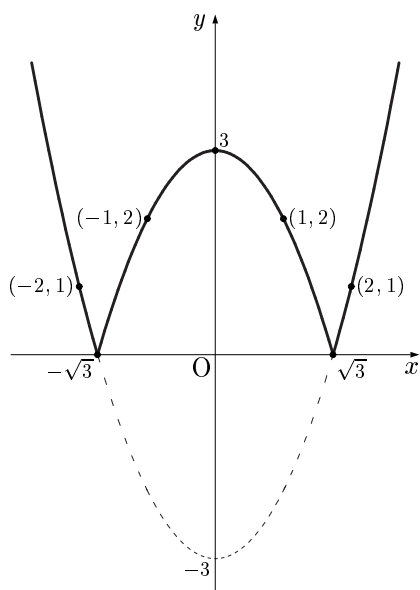
■ $y = \sqrt{x+5}$ のグラフは、 $y = \sqrt{x}$ のグラフを
x 軸方向に -5 だけ平行移動したものである。

- (2)

x	-2	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	2
$x^2 - 3$	1	0	-2	-3	-2	0	1
$ x^2 - 3 $	1	0	2	3	2	0	1

$y = |x^2 - 3|$ のグラフは、 $y = x^2 - 3$ のグラフの $y \leq 0$
の部分 (x 軸の下側にある部分) を x 軸について折り返したものの。

したがって、 $y = |x^2 - 3|$ のグラフは、下図の太線。



宿題 7-2

x の 2 次方程式 $x^2 + kx + 1 = 0$ が異なる 2 つの実数解 α, β を持つとする。

- (1) k の範囲を求めよ。
(2) $\alpha^2 + \beta^2$ を k を用いて表せ。
(3) さらに、 $x^2 - (k+4)x + 1 = 0$ の 2 解が α^2, β^2 だとする。
このとき、 k の値を求めよ。

(1) $x^2 + kx + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$

$$\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2 + 1 = 0$$

$$\left(x + \frac{k}{2}\right)^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2 - 1 \cdots \textcircled{1}'$$

と変形できる。

$\textcircled{1}$ が異なる 2 つの実数解 α, β を持つので、 $\textcircled{1}'$ の右辺
が正であり、

$$\left(\frac{k}{2}\right)^2 - 1 > 0$$

$$k^2 - 4 > 0$$

$$(k+2)(k-2) > 0$$

$$\boxed{k < -2, k > 2} \cdots \textcircled{2} \text{ である。}$$

別解 $\textcircled{1}$ の判別式 $D = k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$ が正、という条件
を考えても良い。

- (2) α, β は $\textcircled{1}$ の 2 解なので、解と係数の関係より、

$$\alpha + \beta = -k \cdots \textcircled{3}$$

$$\alpha\beta = 1 \cdots \textcircled{4}$$

が成立。

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= (-k)^2 - 2 \cdot 1 \quad (\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より})$$

$$= \boxed{k^2 - 2} \cdots \textcircled{5}$$

- (3) $x^2 - (k+4)x + 1 = 0$ の 2 解が α^2, β^2 なので、解と係
数の関係より、

$$\alpha^2 + \beta^2 = k + 4 \cdots \textcircled{6}$$

$$\alpha^2\beta^2 = 1 \cdots \textcircled{7}$$

である。($\textcircled{4}$ より $\textcircled{7}$ は成立している)

$\textcircled{5}, \textcircled{6}$ より

$$k^2 - 2 = k + 4$$

$$k^2 - k - 6 = 0$$

$$(k+2)(k-3) = 0$$

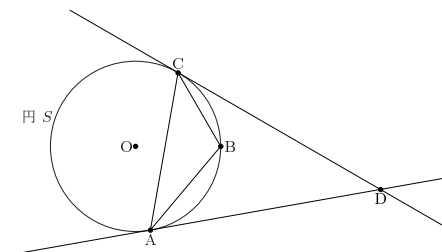
$$k = -2, 3$$

$$\textcircled{2} \text{ より、求める } k \text{ の値は } \boxed{k = 3}$$

宿題 7-3

$\triangle ABC$ において、 $AB = 2\sqrt{5}$, $BC = 3\sqrt{2}$, $AC = 5\sqrt{2}$ である。

- (1) $\theta = \angle ABC$ とおくとき、 $\cos \theta$ の値を求めよ。
- (2) 3点 A, B, C を通る円を S とし、 S の半径を R とする。 R の値を求めよ。
- (3) 円 S の中心を O とおく。点 A における S の接線と点 C における S の接線の交点を D とおく。 $\angle AOD$ を θ を用いて表せ。
- (4) 線分 OD の長さを求めよ。



- (1) $\triangle ABC$ において、余弦定理より、
 $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cdot \cos \theta$
 $50 = 20 + 18 - 12\sqrt{10} \cdot \cos \theta$

$$\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

- (2) $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ と (1) の結果より、
 $\frac{1}{10} + \sin^2 \theta = 1$
 $\sin^2 \theta = \frac{9}{10}$
 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ なので $\sin \theta > 0$ だから
 $\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$\triangle ABC$ において、正弦定理より、

$$2R = \frac{AC}{\sin \theta} = \frac{5\sqrt{2}}{\frac{3}{\sqrt{10}}} = \frac{10\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore R = \frac{5\sqrt{5}}{3}$$

- (3) 直線 OD に関して対称な状況なので、
 $\angle AOD = \frac{1}{2} \angle AOC \dots \textcircled{1}$ である。

線分 BO の延長線と円 S の交点を E とおくと、
 $\angle AOC = 2\angle AEC$ (中心角と円周角の関係)
 $= 2(180^\circ - \angle ABC)$ (内接四角形の性質)
 $= 2(180^\circ - \theta) \dots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より、 } \angle AOD = 180^\circ - \theta$$

- (4) 直線 AD は円 S の接線なので、 $OA \perp AD$ より
 $\triangle OAD$ は $\angle OAD = 90^\circ$ である直角三角形だから
 $\frac{OA}{OD} = \cos \angle AOD$

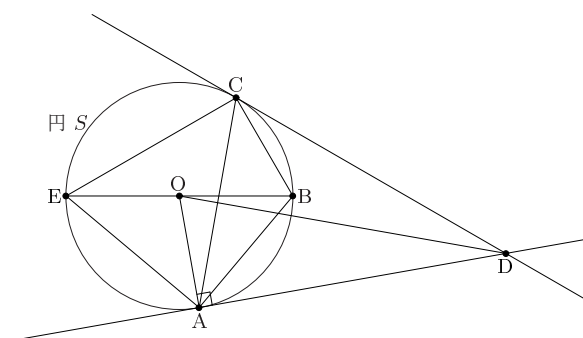
$$= \cos(180^\circ - \theta) \quad ((3) \text{ の結果より})$$

$$= -\cos \theta \quad (\text{補角公式より})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}} \quad ((1) \text{ の結果より})$$

$$OD = \sqrt{10}OA = \sqrt{10} \cdot \frac{5\sqrt{5}}{3} \quad ((2) \text{ の結果より})$$

$$= \frac{25\sqrt{2}}{3}$$



宿題 7-4

x の 2 次方程式 $x^2 - kx + \frac{k^2}{4} - k + 2 = 0$ が $0 < x < 2$ の範囲に 2 つの解 (重解も含む) を持つような k の範囲を求めよ。

$x^2 - kx + \frac{k^2}{4} - k + 2 = 0 \cdots \textcircled{1}$ の左辺を $f(x)$ とおく。

$f(x) = \left(x - \frac{k}{2}\right)^2 - k + 2$ なので、 $y = f(x)$ のグラフは、頂点が $\left(\frac{k}{2}, -k + 2\right)$ である下に凸な放物線。

題意をみたすのは、 $y = f(x)$ のグラフが x 軸の $0 < x < 2$ の部分と異なる 2 点で交わるか接するときで、そのための条件は

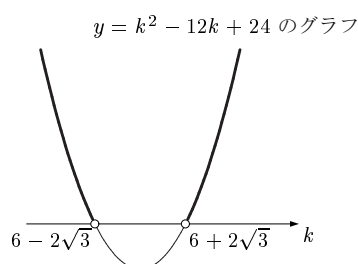
$$\begin{cases} 0 < (\text{頂点の } x \text{ 座標}) < 2 \\ (\text{頂点の } y \text{ 座標}) \leq 0 \\ f(0) > 0 \\ f(2) > 0 \end{cases}$$

である。

$$\begin{cases} 0 < \frac{k}{2} < 2 \\ -k + 2 \leq 0 \\ \frac{k^2}{4} - k + 2 > 0 \\ \frac{k^2}{4} - 3k + 6 > 0 \end{cases}$$

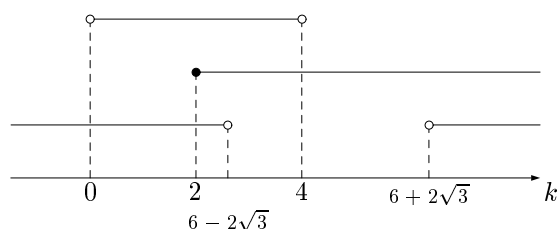
$$\begin{cases} 0 < k < 4 \cdots \textcircled{2} \\ k \geq 2 \cdots \textcircled{3} \\ k^2 - 4k + 8 > 0 \cdots \textcircled{4} \\ k^2 - 12k + 24 > 0 \cdots \textcircled{5} \end{cases}$$

$k^2 - 4k + 8 = (k - 2)^2 + 4$ なので、 $\textcircled{4}$ は必ず成立。



上図より、 $\textcircled{5}$ をみたす k の範囲は

$$k < 6 - 2\sqrt{3}, \quad k > 6 + 2\sqrt{3}$$



上図より、 $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$, $\textcircled{5}$ をすべてみたす k の範囲は、

$$2 \leq k < 6 - 2\sqrt{3}$$