－ 中3C　宿題プリント(2学期-8)　解答－

宿題 8-1

$y=(x^2-4x)^2-6(x^2-4x)+7$ という4次関数について、
$-1 \leqq x \leqq 1$ を x が動くときの y の値域を求めたい。

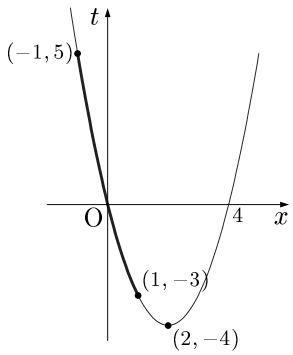
(1)　$t=x^2-4x$ とおく。$-1 \leqq x \leqq 1$ を x が動くときの t の値域を求めよ。

(2)　y を t のみの式で表せ。

(3)　$-1 \leqq x \leqq 1$ を x が動くときの y の値域を求めよ。

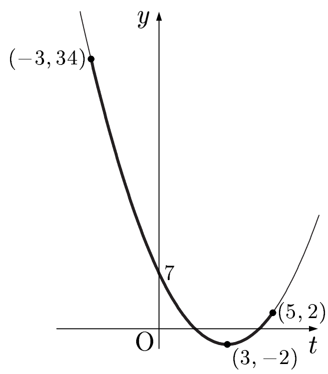
(4)　x の動く範囲が $0 \leqq x \leqq \sqrt{11}$ だった場合、y の値域を求めよ。

(1)　$t=x^2-4x=(x-2)^2-4$ のグラフは下図のよう。
$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき、t の値域は $\boxed{-3 \leqq t \leqq 5}$



(2)　$\boxed{y=t^2-6t+7}$

(3)　$-1 \leqq x \leqq 1$ を x が動くとき、(1) より、t は $-3 \leqq t \leqq 5$ を動く。
このときの $y=t^2-6t+7=(t-3)^2-2$ の値域を調べればよい。



上図より、y の値域は $\boxed{-2 \leqq y \leqq 34}$

(4)　x の動く範囲が $0 \leqq x \leqq \sqrt{11}$ だった場合、(1) のグラフより、t の値域は $-4 \leqq t \leqq 0$ である。
($3<\sqrt{11}<4$ に注意)

t がこの範囲を動くときの y の値域を求めればよく、
$t=-4$ のとき $y=(-4)^2-6(-4)+7=47$　および
(3) のグラフより、$\boxed{7 \leqq y \leqq 47}$

宿題 8-2

次のような整式 $f(x)$ を求めよ。

(1)　$f(x)$ は2次式で、$f(-1)=5,\ f(2)=5,\ f(3)=7$

(2)　$f(x)$ は3次式で、$f(0)=2,\ f(1)=1,\ f(2)=4,\ f(3)=9$

■ (1) では $f(x)=ax^2+bx+c$, (2) では $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおいて、調べることで答が出せるが、少し工夫して求めることもできる。

(1)　$f(x)$ は2次式なので、
$f(x)=ax^2+bx+c$ (a,b,c は定数で、$a \neq 0$)
とおけて、
$f(-1)=5$ より、$a-b+c=5\ \cdots①$
$f(2)=5$ より、$4a+2b+c=5\ \cdots②$
$f(3)=7$ より、$9a+3b+c=7\ \cdots③$

$\begin{cases} ① \\ ② \\ ③ \end{cases}$ を連立して解くと、

$a=\dfrac{1}{2},\ b=-\dfrac{1}{2},\ c=4$

したがって、$f(x)=\boxed{\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x+4}$

<u>別解</u>
$f(-1), f(2)$ の値が共に 5 であることに注目して、
$g(x)=f(x)-5$ とおく。
このとき、
$g(-1)=f(-1)-5=0\ \cdots④$
$g(2)=f(2)-5=0\ \cdots⑤$
$g(3)=f(3)-5=2\ \cdots⑥$ であり、
$g(x)$ が2次式であることと、④,⑤より、
$g(x)=a(x+1)(x-2)$ (a は0以外の定数) とおける。
⑥ より、$2=a\cdot4\cdot1\quad\therefore\ a=\dfrac{1}{2}$

$f(x)=g(x)+5=\dfrac{1}{2}(x+1)(x-2)+5$

$\quad=\boxed{\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x+4}$

(2)　$f(x)$ は3次式で、$f(0)=2$ より、
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$ (a,b,c は定数で、$a \neq 0$)
とおける。
$f(1)=1$ より、$a+b+c+2=1\ \cdots①$
$f(2)=4$ より、$8a+4b+2c+2=4\ \cdots②$
$f(3)=9$ より、$27a+9b+3c+2=9\ \cdots③$

$\begin{cases} ① \\ ② \\ ③ \end{cases}$ を連立して解くと、

$a=-\dfrac{1}{3},\ b=3,\ c=-\dfrac{11}{3}$

なので、$f(x) = \boxed{-\dfrac{1}{3}x^3 + 3x^2 - \dfrac{11}{3}x + 2}$

<u>別解</u>

$f(1) = 1^2, f(2) = 2^2, f(3) = 3^2$ であることに注目して、$g(x) = f(x) - x^2$ とおくと、$g(x)$ は 3 次式であり、
$g(1) = 0, g(2) = 0, g(3) = 0$ をみたす。
よって、
$g(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)$ (a は 0 以外の定数)
とおけて、$g(0) = f(0) - 0^2 = 2$ より、
$2 = a \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \quad \therefore\ a = -\dfrac{1}{3}$
よって、

$$f(x) = g(x) + x^2 = -\frac{1}{3}(x-1)(x-2)(x-3) + x^2$$
$$= \boxed{-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - \frac{11}{3}x + 2}$$

宿題 8-3

(1) 3 次式 x^3 を 1 次式 $x-4$ で割った商 $Q(x)$ と余り r を求め、この割算を表す等式を作れ。

(2) p を 5 以上の素数とする。
p^3 を $p-4$ で割った余りが 4 であるとき、p を求めたい。
以下の空欄に当てはまる最も適切な数値を答えよ。

$p-4$ で割った余りが 4 であるから、$p-4 \geqq \boxed{\text{ア}}$ である。
(1) で作った等式に $x = p$ を代入すると、p^3 を $p-4$ で割った余りは、
$\boxed{\text{イ}}$ を $p-4$ で割った余りと等しいとわかる。

したがって、$p-4$ は $\boxed{\text{ウ}}$ の約数とわかる。

p は 5 以上の素数なので、奇数だから $p-4$ も奇数である。

$\boxed{\text{ウ}}$ の約数で、$\boxed{\text{ア}}$ 以上の奇数を考えることで、$p-4$ は $\boxed{\text{エ}}$ または $\boxed{\text{オ}}$ だとわかる。

以上より、求める素数 p は、$p = \boxed{\text{カ}}$ である。

(1)

$$\begin{array}{r|lll}
 & x^2 & +4x & +16 \\ \hline
x-4 & x^3 & & \\
 & x^3 & -4x^2 & \\ \hline
 & & 4x^2 & \\
 & & 4x^2 & -16x \\ \hline
 & & & 16x \\
 & & & 16x\ -64 \\ \hline
 & & & \quad 64
\end{array}$$

上の計算により、
商は $Q(x) = \boxed{x^2 + 4x + 16}$,
余りは $r = \boxed{64}$

この割算を等式で表すと
$\boxed{x^3 = (x-4)(x^2+4x+16) + 64} \cdots$ ①

(2) $p-4$ で割った余りが 4 であるから、
$p - 4 \geqq \boxed{5}$ である。

(1) で作った等式 ① に $x = p$ を代入すると、
$p^3 = \underbrace{(p-4)(p^2+4p+16)}_{p-4\text{ の整数倍}} + 64$ となり、

p^3 を $p-4$ で割った余り 4 は、$\boxed{64}$ を $p-4$ で割った余りと等しいとわかる。

したがって、
$64 = (p-4)q + 4$ (q は整数)
$60 = (p-4)q$
と表せ、$p-4$ は $\boxed{60}$ の約数とわかる。

p は 5 以上の素数なので、奇数だから $p-4$ も奇数である。

$\boxed{60}$ の約数で、$\boxed{5}$ 以上の奇数を考えることで、
$p-4$ は $\boxed{5}$ または $\boxed{15}$ だとわかる。

よって、$p = 9$ または $p = 19$ となるが、p は素数なので、$p = \boxed{19}$ である。

空欄に当てはまる数字は、
ア: 5　イ: 64　ウ: 60　エ: 5　オ: 15　カ: 19

宿題 8-4

$x^2 + y^2 + kx - 2ky - 25 - 5k = 0 \cdots$ ① の表す図形を C とする。
① を変形すると、
$x^2 + y^2 - 25 + k(x - 2y - 5) = 0 \cdots ①'$
となるので、k がどんな値であっても、図形 C は、
$\boxed{\quad\text{ア}\quad} = 0 \cdots$ ② の表す図形と $\boxed{\quad\text{イ}\quad} = 0 \cdots$ ③ の表す図形の交点 P,Q を通る。(x 座標の小さい順に P,Q とする。)
アとイの空欄に当てはまる x, y の式を答え、P,Q の座標を求めよ。

$x^2 + y^2 - 25$ と $x - 2y - 5$ の値が共に 0 のとき、
k がどんな値でも ①$'$ の等式は成立する。

つまり、$x^2 + y^2 - 25 = 0$ の表す図形と、$x - 2y - 5 = 0$ の表す図形の交点の座標を ①$'$ に代入すると成り立つので、これらの交点を ① の表す図形 C は通る。

ア：$\boxed{x^2 + y^2 - 25}$　イ：$\boxed{x - 2y - 5}$ (逆でも可)

$\begin{cases} x^2 + y^2 - 25 = 0 \cdots ② \\ x - 2y - 5 = 0 \cdots ③ \end{cases}$ という連立方程式の解が、交点 P,Q の座標である。

③ より $x = 2y + 5$ を ② に代入して、x を消去すると
$(2y+5)^2 + y^2 - 25 = 0$
$5y^2 + 20y = 0$
$4y(y+4) = 0$
$y = 0, -4$

③ から対応する x の値を求めると、$x = 5, -3$ となる。

以上より、$\boxed{\mathrm{P}(-3, -4),\ \mathrm{Q}(5, 0)}$