

－ 中3C 宿題プリント(2学期-9) 解答－

宿題 9-1

次の不等式をグラフを利用して解け。

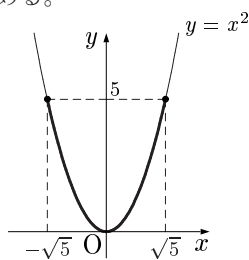
- (1) $x^2 \leq 5$
- (2) $x^2 > -2x$
- (3) $\frac{1}{x} \geq 3$
- (4) $x \leq \frac{5}{x}$

- (1) $y = x^2$ のグラフの $y \leq 5$ の部分に対応する x の範囲が、不等式 $x^2 \leq 5 \cdots \textcircled{1}$ の解である。

右図より、

$\textcircled{1}$ の解は

$$-\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$$

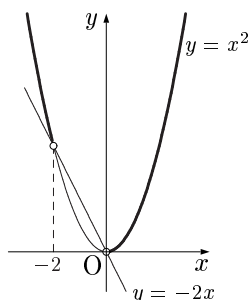


- (2) $y = x^2$ のグラフが $y = -2x$ のグラフの上側にあるような x の範囲が、不等式 $x^2 > -2x \cdots \textcircled{2}$ の解である。

右図より、

$\textcircled{2}$ の解は

$$x < -2, x > 0$$

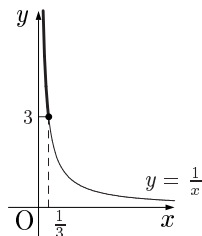


- (3) $y = \frac{1}{x}$ の $y \geq 3$ の部分に対応する x の範囲が、不等式 $\frac{1}{x} \geq 3 \cdots \textcircled{3}$ の解である。

右図より、

$\textcircled{3}$ の解は

$$0 < x \leq \frac{1}{3}$$



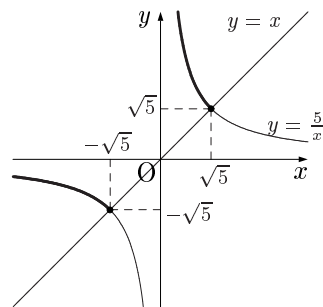
- (4) $y = x$ のグラフが $y = \frac{5}{x}$ のグラフの下側にあるような x の範囲が、不等式 $x \leq \frac{5}{x} \cdots \textcircled{4}$ の解である。

右図より、

$\textcircled{4}$ の解は

$$x \leq -\sqrt{5}, 0 < x \leq \sqrt{5}$$

【(1) の結果と見比べてみよう。 $\textcircled{4}$ を変形し、 $\textcircled{1}$ として解くのは間違いである。】



宿題 9-2

次の関数のグラフを描け。

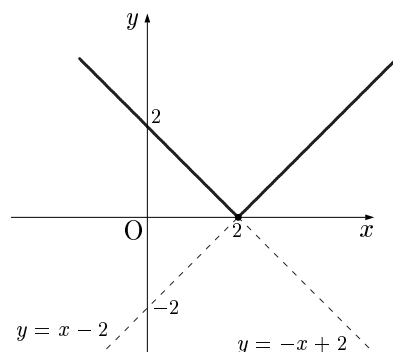
- (1) $y = |x - 2|$
- (2) $y = |x| - 2$
- (3) $y = |x^2 - 4x + 3|$

$$\begin{aligned} (1) \quad |x - 2| &= \begin{cases} x - 2 & \cdots x - 2 \geq 0 \text{ の場合} \\ -(x - 2) & \cdots x - 2 \leq 0 \text{ の場合} \end{cases} \\ &= \begin{cases} x - 2 & \cdots x \geq 2 \text{ の場合} \\ -x + 2 & \cdots x \leq 2 \text{ の場合} \end{cases} \end{aligned}$$

と変形できる。

したがって、 $y = |x - 2|$ のグラフは、直線 $y = x - 2$ の $x \geq 2$ の部分と、直線 $y = -x + 2$ の $x \leq 2$ の部分をつなげたもの。

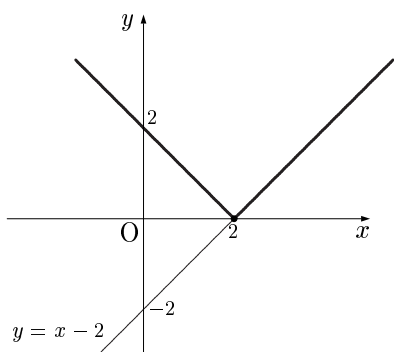
したがって、 $y = |x - 2|$ のグラフは、下図のよう。



別解

$y = |x - 2|$ のグラフは、 $y = x - 2$ のグラフの $y \leq 0$ の部分 (x 軸の下の部分) を x 軸に関して上に折り返したものである。

したがって、 $y = |x - 2|$ のグラフは、下図のよう。

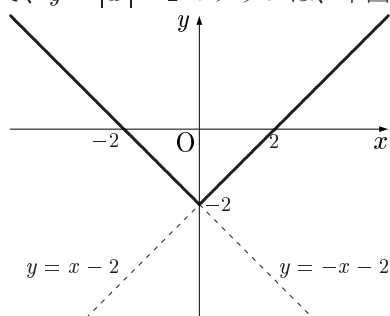


$$(2) \quad |x| - 2 = \begin{cases} x - 2 & \cdots x \geq 0 \text{ の場合} \\ -x - 2 & \cdots x \leq 0 \text{ の場合} \end{cases}$$

と変形できる。

したがって、 $y = |x| - 2$ のグラフは、直線 $y = x - 2$ の $x \geq 0$ の部分と、直線 $y = -x - 2$ の $x \leq 0$ の部分をつなげたもの。

したがって、 $y = |x| - 2$ のグラフは、下図のよう。

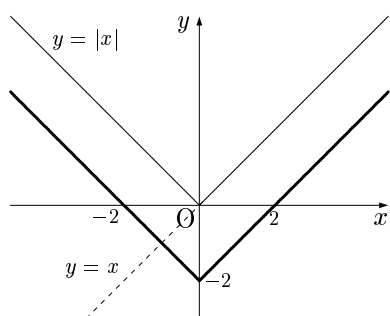


■ (1) の結果との違いに注目しよう。

別解

$y = |x|$ のグラフは、 $y = x$ のグラフの $y \leq 0$ の部分 (x 軸の下の部分) を x 軸に関して上に折り返したものの。

$y = |x| - 2$ のグラフは、 $y = |x|$ のグラフを y 軸方向に -2 だけ平行移動したものの。



$$(3) \quad |x^2 - 4x + 3|$$

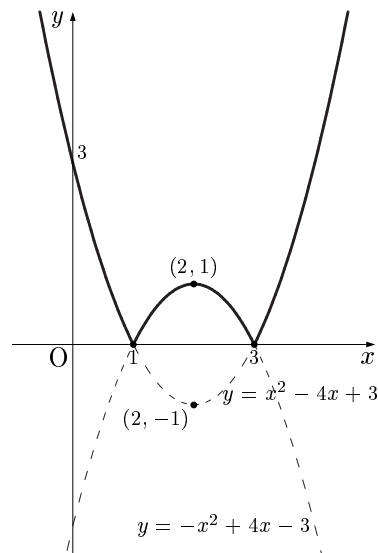
$$= \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \cdots x^2 - 4x + 3 \geq 0 \text{ の場合} \\ -(x^2 - 4x + 3) & \cdots x^2 - 4x + 3 \leq 0 \text{ の場合} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \cdots x \leq 1, x \geq 3 \text{ の場合} \\ -x^2 + 4x - 3 & \cdots 1 \leq x \leq 3 \text{ の場合} \end{cases}$$

と変形できる。

したがって、 $y = |x^2 - 4x + 3|$ のグラフは、

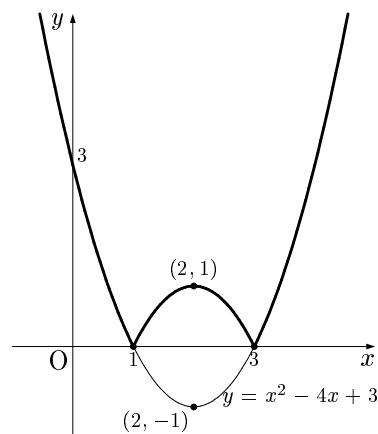
$y = x^2 - 4x + 3$ のグラフの $x \leq 1, x \geq 3$ の部分と、 $y = -x^2 + 4x - 3$ のグラフの $1 \leq x \leq 3$ の部分をつなげたもの。図示すると、下図のよう。



別解

$y = |x^2 - 4x + 3|$ のグラフは、

$y = x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$ のグラフの $y \leq 0$ の部分 (x 軸の下の部分) を x 軸に関して上に折り返したものの。



宿題 9-3

(1) 次の表を完成させよ。

$x \pmod{7}$	0	1	2	3	4	5	6
$x^3 \pmod{7}$							

(2) $x^3 + y^3 = 1978$ をみたす整数 x, y は存在するか？
 存在するなら、そのような x, y の例をひとつ答えよ。
 存在しないなら、そのことを証明せよ。

(1)

$x \pmod{7}$	0	1	2	3	4	5	6
$x^3 \pmod{7}$	0	1	1	6	1	6	6

【補足】 合同式は $\pmod{7}$ とする。

$5^3 \equiv (-2)^3 \equiv -8 \equiv -1 \equiv 6$ のように計算すると楽。

- (2) $x^3 + y^3 = 1978$ をみたす整数 x, y が存在したとすると、 $x^3 + y^3 \equiv 1978 \equiv 4$ が成立するはずである。

(1) の結果より、 $\pmod{7}$ で $x^3 + y^3$ がとりうる値は
 $0 + 0 \equiv 0$, $0 + 1 \equiv 1$, $0 + 6 \equiv 6$, $1 + 1 \equiv 2$,

$1 + 6 \equiv 0$, $6 + 6 \equiv 5$ のいずれかであり、

$x^3 + y^3 \equiv 4$ は成立しない。

よって、 $x^3 + y^3 = 1978$ をみたす整数 x, y は存在しない。

宿題 9-4

整式 $f(x)$ を $x-1, x-2, x-3$ で割った余りがそれぞれ 2, 3, 4 だとする。
 $f(x)$ を 3 次式 $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割った余りの整式 $R(x)$ を求めたい。

(1) $R(x)$ の次数は 以下である。
 に当てはまる最も適切な数字を答えよ

(2) $R(0), R(1), R(2), R(3), R(4)$ のうち、値がわかるものはどれか？
 それらについて値を求めよ。

(3) $R(x)$ を求めよ。

- (1) $R(x)$ は 3 次式で割った余りなので、その次数は 以下である。

- (2) $f(x)$ を 3 次式 $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割った商を $Q(x)$ とおくと、

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)Q(x) + R(x) \cdots \textcircled{1}$$

と表せる。

これに $x = 1, 2, 3$ を代入すると、

$$f(1) = R(1), f(2) = R(2), f(3) = R(3) \cdots \textcircled{2} \text{ が成立。}$$

一方、 $f(x)$ を $x-1, x-2, x-3$ で割った余りがそれぞれ 2, 3, 4 なので、剰余の定理より、

$$f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 4 \cdots \textcircled{3} \text{ である。}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より、} \boxed{R(1) = 2, R(2) = 3, R(3) = 4}$$

- (3) (2, 3, 4 が、 $x+1$ に $x = 1, 2, 3$ を代入した値と一致していることに注目すると $\cdots$)

$$g(x) = R(x) - (x+1) \text{ とおく。}$$

(2) の結果より、

$$g(1) = R(1) - 2 = 0,$$

$$g(2) = R(2) - 3 = 0,$$

$$g(3) = R(3) - 4 = 0$$

よって、 $g(x)$ は $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割り切れる。

$R(x)$ が 2 次以下なので、 $g(x) = R(x) - (x+1)$ も 2 次以下である。

2 次以下で、 $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割り切れる整式は 0 のみなので、 $g(x) = 0$ である。

$$\text{よって、} R(x) = g(x) + x + 1 = \boxed{x + 1}$$

別解

$R(x)$ は 2 次以下だから、 $R(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c は実数の定数) とおける。

(2) の結果より、

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \cdots \textcircled{4} \\ 4a + 2b + c = 3 \cdots \textcircled{5} \\ 9a + 3b + c = 4 \cdots \textcircled{6} \end{cases}$$

$$\textcircled{5} - \textcircled{4} \text{ より、} 3a + b = 1$$

$$\textcircled{6} - \textcircled{5} \text{ より、} 5a + b = 1$$

これを解くと、 $a = 0, b = 1$

$$\textcircled{4} \text{ に代入して、} c = 1$$

$$\text{以上より、} R(x) = 0x^2 + 1x + 1 = \boxed{x + 1}$$