－ 中 3C　宿題プリント (2 学期-10)　解答－

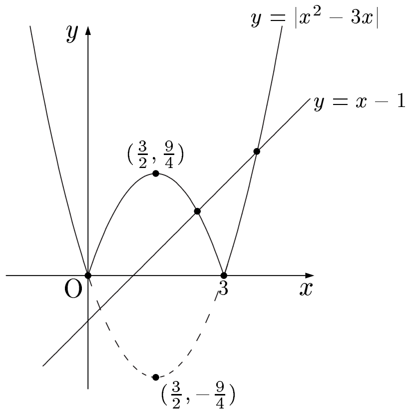
宿題 10-1

(1)　方程式 $\left|x^2-3x\right| = x-1$ を解け。

(2)　不等式 $\left|x^2-3x\right| > x-1$ を解け。

(3)　k を定数とする。
x の方程式 $\left|x^2-3x\right| = k$ が、$1 \leqq x \leqq 4$ の範囲に異なる 3 つの実数解をもつような k の範囲を求めよ。

(1)　方程式 $\left|x^2-3x\right| = x-1$ の実数解は、$y = \left|x^2-3x\right|$ のグラフと、$y = x-1$ のグラフの共有点の x 座標である。



$y = x^2-3x$ と $y = x-1$ の $x > 3$ での交点の x 座標は

$x^2-3x = x-1$

$x^2-4x+1 = 0$

$(x-2)^2-2^2+1 = 0$

$(x-2)^2 = 3$

$x-2 = \pm\sqrt{3}$

$x = 2\pm\sqrt{3}$

$x > 3$ より、$x = 2+\sqrt{3}$

$y = -x^2+3x$ と $y = x-1$ の $0 < x < 3$ での交点の x 座標は

$-x^2+3x = x-1$

$x^2-2x-1 = 0$

$(x-1)^2-1^2-1 = 0$

$(x-1)^2 = 2$

$x-1 = \pm\sqrt{2}$

$x = 1\pm\sqrt{2}$

$0 < x < 3$ より、$x = 1+\sqrt{2}$

以上より、方程式 $\left|x^2-3x\right| = x-1$ の実数解は、

$\boxed{x = 1+\sqrt{2}, 2+\sqrt{3}}$

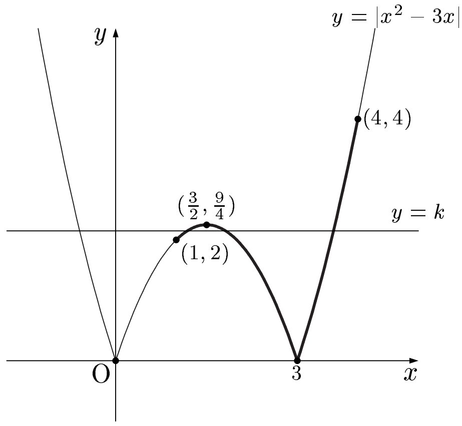
(2)　不等式 $\left|x^2-3x\right| > x-1$ の解は、$y = \left|x^2-3x\right|$ のグラフが $y = x-1$ のグラフの上側にあるような x の範囲と一致する。

(1) のグラフと結果より、

$\boxed{x < 1+\sqrt{2},\ x > 2+\sqrt{3}}$

(3)　x の方程式 $\left|x^2-3x\right| = k$ の実数解は $y = \left|x^2-3x\right|$ のグラフと直線 $y = k$ の共有点の x 座標と一致する。

したがって、この 2 つのグラフが $1 \leqq x \leqq 4$ の範囲に異なる 3 個の共有点を持つ k の範囲が求めるもの。



上図より、$\boxed{2 \leqq k < \dfrac{9}{4}}$

宿題 10-2

k を定数とする。
x の 2 次方程式 $x^2-2kx-9=0$ $\cdots$ ① について考える。

(1) ① の実数解は、放物線 $y=x^2-9$ と直線 $y=\boxed{}$ の共有点の x 座標と一致する。
空欄に当てはまる式を答えよ。

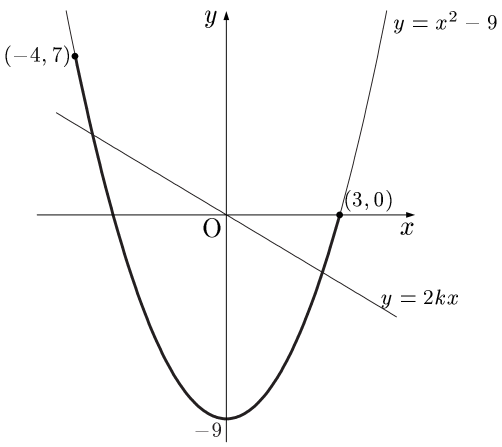
(2) ① が $-4\leqq x\leqq 3$ の範囲に異なる 2 解をもつとする。k の範囲を求めよ。

(3) (2) の 2 解を α,β $(\alpha<\beta)$ とするとき、α,β がとる値の範囲をそれぞれ求めよ。

(1) $x^2-2kx-9=0$ $\cdots$ ① を変形すると、
$x^2-9=2kx$ となるので、放物線 $y=x^2-9$ と
直線 $y=\boxed{2kx}$ の共有点の x 座標が ① の実数解である。

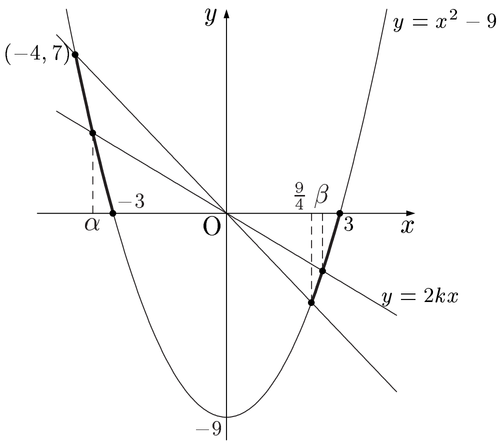
(2) ① が $-4\leqq x\leqq 3$ の範囲に異なる 2 解をもつのは、
$y=x^2-9,\ y=2kx$ の 2 つのグラフが、$-4\leqq x\leqq 3$ の範囲に 2 つの交点をもつとき。
直線 $y=2kx$ が点 $(-4,7)$ を通るのは、
$2k=-\dfrac{7}{4}$
$k=-\dfrac{7}{8}$ のとき。
直線 $y=2kx$ が点 $(3,0)$ を通るのは、
$k=0$ のとき。
したがって、下図より、

$\boxed{-\dfrac{7}{8}\leqq k\leqq 0}$



(3) $k=-\dfrac{7}{8}$ のとき、① の解は
$x^2+\dfrac{7}{4}x-9=0$
$(x+4)\left(x-\dfrac{9}{4}\right)=0$
$x=-4,\ \dfrac{9}{4}$
$k=0$ のとき、① の解は、$x=\pm3$
したがって、下図より、

$\boxed{-4\leqq\alpha\leqq-3,\ \dfrac{9}{4}\leqq\beta\leqq3}$



宿題 10-3

放物線 C: $y=x^2$ と放物線 D: $y=-2x^2+4x+5$ があり、2 点 A,B で交わっている。A,B の x 座標を α,β $(\alpha<\beta)$ として、以下の問に答えよ。

(1) $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ の値を求めよ。

(2) 線分 AB の中点 M の座標を求めよ。

(3) 直線 AB の式を求めよ。

(1) $x^2=-2x^2+4x+5$

$3x^2-4x-5=0\ \cdots①$

という x の 2 次方程式の実数解が α,β である。

① の左辺は $3(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解でき、これを展開すると

$3x^2-3(\alpha+\beta)x+3\alpha\beta$ となるので、① の左辺と係数を比べて、

$$\begin{cases} -4=-3(\alpha+\beta) \\ -5=3\alpha\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta=\boxed{\dfrac{4}{3}} \\ \alpha\beta=\boxed{-\dfrac{5}{3}} \end{cases}$$

補足: 解と係数の関係から求めてもよい。

(2) A,B は放物線 $y=x^2$ 上の点なので、$\mathrm{A}(\alpha,\alpha^2),\ \mathrm{B}(\beta,\beta^2)$ と表せる。

したがって、線分 AB の中点 M の座標は、

$\mathrm{M}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$ と表せる。

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=\left(\frac{4}{3}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)\quad(\text{(1) の結果より})\\&=\frac{46}{9}\end{aligned}$$

したがって、$\boxed{\mathrm{M}\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{23}{9}\right)}$

(3) 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\alpha^2),\ \mathrm{B}(\beta,\beta^2)$ を通る直線の式は

$y=\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+\alpha^2$

$y=\dfrac{(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+\alpha^2$

$y=(\alpha+\beta)(x-\alpha)+\alpha^2$

$y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$

と表せる。

(1) の結果を代入して、

$\boxed{y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{3}}$ が直線 AB の式である。

補足: 直線 AB の式を先に求めておき、これに M の x 座標 $\dfrac{2}{3}$ を代入して、M の y 座標を求めてもよい。

別解

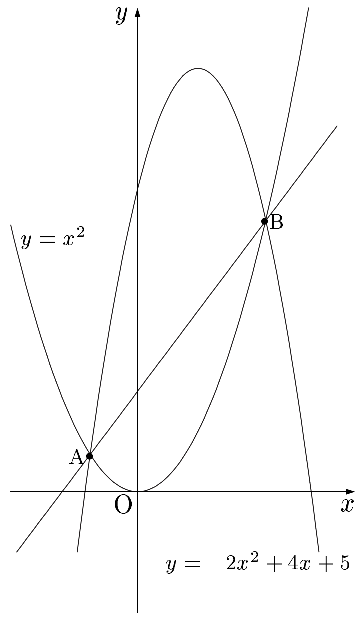
$y=x^2\ \cdots②,\ y=-2x^2+4x+5\ \cdots③$ を元に、2 次の係数が 0 になるように、$② \times 2+③$ という等式を作ると、

$3y=4x+5$

$y=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{5}{3}\ \cdots④$

となり、A,B の座標を ④ に代入すれば成り立つ。

すなわち、④ の表す図形は 2 点 A,B を通る直線である。



宿題 10-4

長さ 8 の線分 AB を直径とする円を底面とし、高さが $8\sqrt{2}$ の直円錐がある。
この直円錐の頂点を O とし、線分 OB 上に $\mathrm{OP} = 4$ となるように点 P をとる。
直円錐の側面に沿って 2 点 A,P を結ぶ最短の曲線の長さを求めよ。
(ヒント： OB で切って得られる展開図に注目すると ⋯)

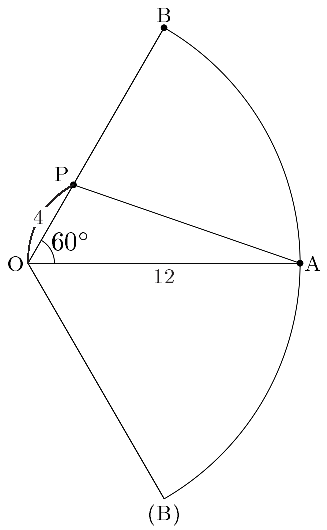
線分 AB の中点を M とすると、$\triangle\mathrm{OBM}$ は $\angle\mathrm{OMB} = 90°$ の直角三角形である。
よって、

$$\mathrm{OB} = \sqrt{4^2 + (8\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{1 + (2\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{9} = 12$$

側面を線分 OB で切って得られる扇形は半径 12 であり、底円の半径 4 との比が 3:1 であることから、扇形の中心角は $360° \div 3 = 120°$

また、AB は底円の直径であるから、A は弧の中点になる。

したがって、下図のようだと分かる。



$\triangle\mathrm{OAP}$ で余弦定理を用いると、

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2 &= \mathrm{OP}^2 + \mathrm{OA}^2 - 2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OA}\cdot\cos 60° \\ &= 4^2 + 12^2 - 2\cdot 4\cdot 12\cdot\frac{1}{2} \\ &= 4^2 + 12^2 - 4\cdot 12 \\ &= 4^2(1 + 9 - 3) \\ &= 4^2\cdot 7\end{aligned}$$

よって、$\boxed{\mathrm{AP} = 4\sqrt{7}}$