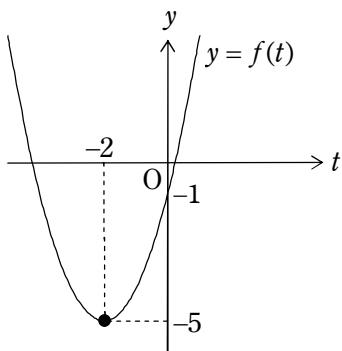


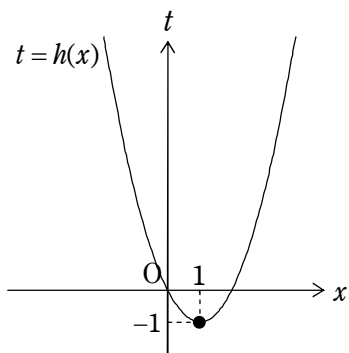
中3数学D 宿題解答 2学期-7

宿題 7-1

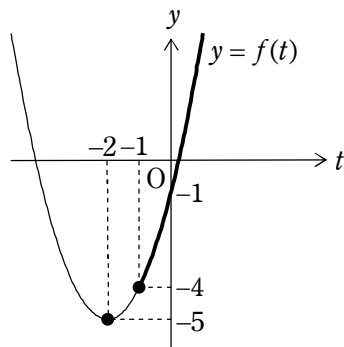
- (1) $y = f(t) = t^2 + 4t - 1 = (t+2)^2 - 5$
 のグラフより、 t が実数全体を動くとき、
 y の最小値は $\boxed{-5}$.



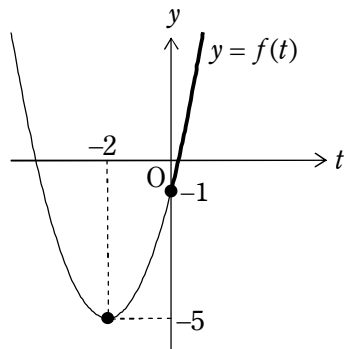
- (2) $y = g(x) = (x^2 - 2x)^2 + 4(x^2 - 2x) - 1$
 $t = h(x) = x^2 - 2x$ とおくと、 $y = g(x)$ は
 $t = h(x) = x^2 - 2x$
 $y = f(t) = t^2 + 4t - 1$ ((1)の関数)
 を合成した関数になっている.
 x が実数全体を動くとき、
 $t = h(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$
 の値域は、 $t = h(x)$ のグラフより $t \geq -1$.



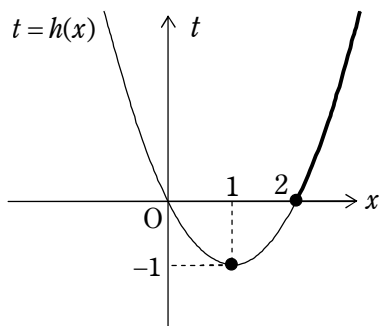
t がこの範囲を動くときの、 $y = f(t)$ の最小値は、 $y = f(t)$ のグラフ (下図) より、
 $t = -1$ のときの $\boxed{-4}$.



- (3) x が $x \geq \boxed{}$ の範囲を動くとき、 $t = h(x)$
 のグラフより、 t の値域は $t \geq \boxed{?}$ の形に
 なる. t がこの範囲を動くときの $y = f(t)$
 の最小値が -1 になるのは、 $y = f(t)$ のグ
 ラフより、 $\boxed{?} = 0$ のときである.



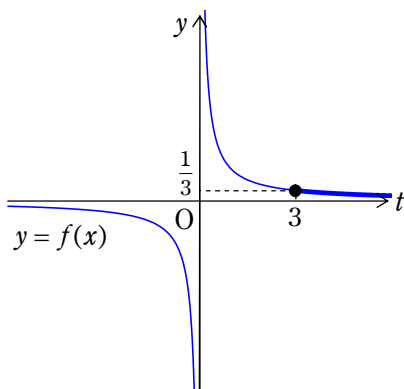
したがって、空欄には、「 $t = h(x)$ の値域
 が $t \geq 0$ となるような数」を埋めればよく、
 $t = h(x)$ のグラフより、 $\boxed{2}$ となる.



宿題 7-2

- (1) $y = f(x) = \frac{1}{x}$ のグラフより,

$$0 < y \leq \frac{1}{3}$$



- (2) $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 7}$ は

$$t = g(x) = x^2 - 4x + 7$$

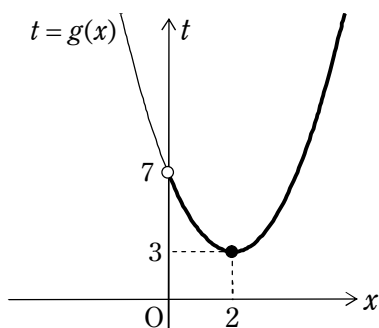
$$y = f(t) = \frac{1}{t}$$

を合成した関数になっている.

x が $x > 0$ の範囲を動くとき,

$$t = g(x) = x^2 - 4x + 7 = (x - 2)^2 + 3$$

の値域は, $t = g(x)$ のグラフより, $t \geq 3$.



t がこの範囲を動くときの $y = f(t)$ の値域は, (1)より,

$$0 < y \leq \frac{1}{3}$$

- (3) $y = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$ は

$$t = f(x) = \frac{1}{x}$$

$$y = h(t) = 2t^2 - t + \frac{1}{2}$$

を合成した関数になっている.

x が $x \geq 3$ の範囲を動くとき, $t = f(x)$ の

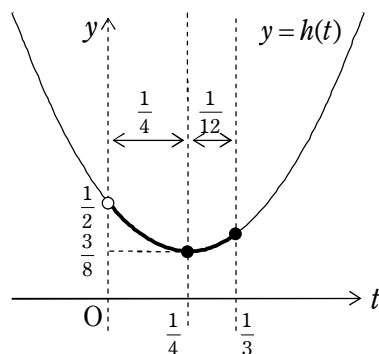
値域は, (1)より, $0 < t \leq \frac{1}{3}$.

t がこの範囲を動くときの

$$y = h(t) = 2t^2 - t + \frac{1}{2} = 2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{8}$$

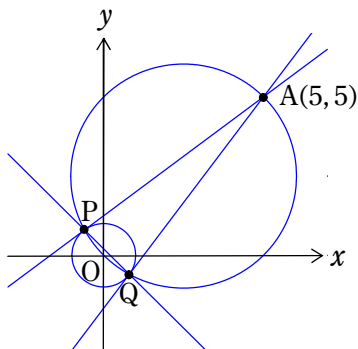
の値域は, $y = h(t)$ のグラフより,

$$\frac{3}{8} \leq y < \frac{1}{2}$$



宿題 7-3

$$C: x^2 + y^2 = 1 \dots\dots\dots ①$$



(1) $\angle OPA = \angle OQA = 90^\circ$

なので, P, Q は O, A を直径の両端とする円 D 上にあり, O, P, Q, A は同一円周上である. D の中心は OA の中点 $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ で, 原点を通るので, D の式は

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$\therefore \boxed{x^2 + y^2 - 5x - 5y = 0} \dots\dots\dots ②$
である.

(2) C, D の 2 交点 P, Q の座標は

① - ②: $\boxed{5x + 5y = 1} \dots\dots\dots ③$

を満たす. すなわち, ③の表す直線は P, Q を通り, 直線 PQ であるから, ③が求める式である.

(3) P, Q は C と直線 PQ の 2 交点であるから,

その座標は連立方程式 $\begin{cases} ① \\ ③ \end{cases}$ の解である.

③より

$$y = -x + \frac{1}{5} \dots\dots\dots ④$$

なので, ①に代入して

$$x^2 + \left(-x + \frac{1}{5}\right)^2 = 1$$

$$2x^2 - \frac{2}{5}x - \frac{24}{25} = 0$$

$$2\left(x + \frac{3}{5}\right)\left(x - \frac{4}{5}\right) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$$

④で y 座標を計算して, 交点 P, Q の座標

は $\boxed{P\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), Q\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)}$ である.

宿題 7-4

(1)	$x \pmod{7}$	0	1	2	3	4	5	6
	$x^3 \pmod{7}$	0	1	1	6	1	6	6

(2) (1)より, 整数 x, y に対して, x^3, y^3 の mod 7 での値は 0, 1, 6 のいずれかであるから, $x^3 + y^3$ の mod 7 での値は,

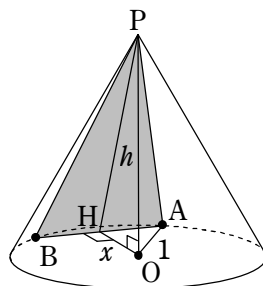
$$0+0 \equiv 0, \quad 0+1 \equiv 1, \quad 0+6 \equiv 6,$$

$$1+1 \equiv 2, \quad 1+6 \equiv 0, \quad 6+6 \equiv 5$$

より, 0, 1, 2, 5, 6 のいずれかである.

一方, $1978 \equiv 578 \equiv 18 \equiv 4 \pmod{7}$ であるので, $x^3 + y^3 = 1978$ を満たす整数 x, y は存在しない.

宿題 7-5



(1) $\boxed{0 \leq x < 1}$

(2) O から AB に下した垂線の足を H とすると, H は二等辺三角形 PAB の底辺 AB の中点であるから, $PH \perp AB$ であり, 三角形 PAB の面積は

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times PH = AH \times PH$$

$$\therefore S^2 = AH^2 \times PH^2$$

(AB が直径でないときは,) 直角三角形 POH でピタゴラスの定理より,

$$PH^2 = PO^2 + OH^2 = h^2 + x^2$$

直角三角形 OAH でピタゴラスの定理より,

$$AH^2 = OA^2 - OH^2 = 1 - x^2$$

なので,

$$S^2 = (h^2 + x^2)(1 - x^2) \\ = \boxed{-x^4 + (1 - h^2)x^2 + h^2}$$

が成り立つ (この結果は, AB が直径のとき, つまり $x=0$ のときも $S^2 = h^2$ となり成立する).

- (3) S は正の数なので, S が最大になるのは S^2 が最大になるときである.

$t = x^2$ とおくと,

$$S^2 = -t^2 + (1 - h^2)t + h^2$$

は t の 2 次関数であり (これを $f(t)$ とおく), (1) より $0 \leq x < 1$ なので, t は

$$0 \leq t < 1 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

の範囲を動く.

したがって, $\textcircled{1}$ の範囲における $f(t)$ の最大値を求めればよい.

$$f(t) = -t^2 + (1 - h^2)t + h^2 \\ = -\{t^2 - (1 - h^2)t\} + h^2 \\ = -\left\{\left(t - \frac{1 - h^2}{2}\right)^2 - \frac{(1 - h^2)^2}{4}\right\} + h^2 \\ = -\left(t - \frac{1 - h^2}{2}\right)^2 + \frac{(1 - h^2)^2}{4} + h^2 \\ = -\left(t - \frac{1 - h^2}{2}\right)^2 + \frac{(1 + h^2)^2}{4}$$

より, $y = f(t)$ のグラフは頂点

$$\left(\frac{1 - h^2}{2}, \frac{(1 + h^2)^2}{4}\right)$$

で上に凸な放物線であるから, $h > 0$ より

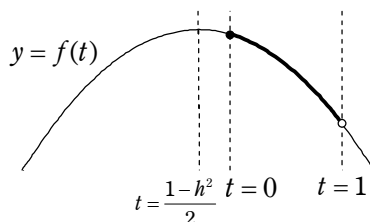
$$\frac{1 - h^2}{2} < \frac{1}{2}$$

に注意して,

- (i) $\frac{1 - h^2}{2} \leq 0$, すなわち

$$1 \leq h^2 \quad \therefore 1 \leq h \quad (h > 0 \text{ より})$$

のとき

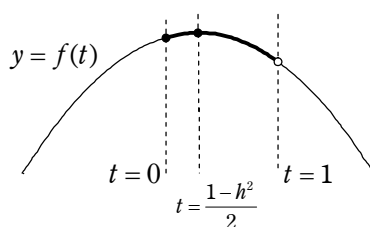


グラフより, $f(t) = S^2$ は $t=0$ のとき最大値 $f(t) = h^2$ を取り, このとき S は最大値 $\sqrt{h^2} = h (> 0)$ を取る.

- (ii) $0 \leq \frac{1 - h^2}{2} < \frac{1}{2}$, すなわち

$$h^2 \leq 1 \quad \therefore (0 <) h \leq 1 \quad (h > 0 \text{ より})$$

のとき



グラフより, $f(t) = S^2$ は $t = \frac{1 - h^2}{2}$ のとき最大値 $\frac{(1 + h^2)^2}{4}$ を取り, このとき S は最大値 $\sqrt{\frac{(1 + h^2)^2}{4}} = \frac{1 + h^2}{2} (> 0)$ を取る.

したがって, S の最大値は

$$\boxed{\begin{array}{ll} (0 <) h \leq 1 \text{ のとき } \frac{1 + h^2}{2} \\ 1 \leq h \text{ のとき } h \end{array}}$$

である.