中3数学D　宿題解答　2学期-8

宿題 8-1

方程式

$$x^2-6x-k=0$$

$$\therefore x^2-6x=k$$

の実数解は,

$$\begin{cases} y=f(x)=x^2-6x \\ y=k \end{cases}$$

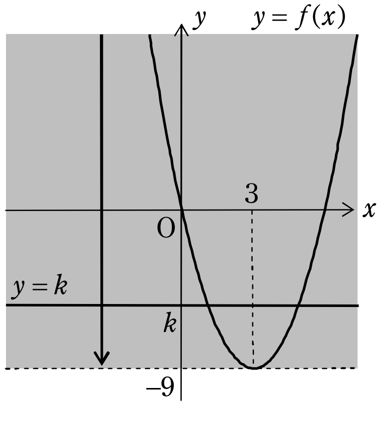
のグラフの交点の x 座標に他ならない.

$$f(x)=(x-3)^2-9$$

より，$y=f(x)$ のグラフは，頂点 $(3,-9)$ で下に凸な放物線である.

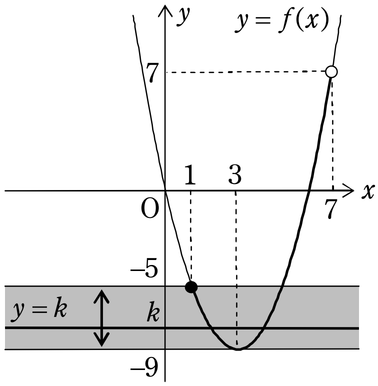
(1) 求める k の範囲は，$y=f(x)$ と $y=k$ のグラフが異なる 2 点で交わるような k の範囲と言い換えられるので，グラフより

$\boxed{k>-9}$



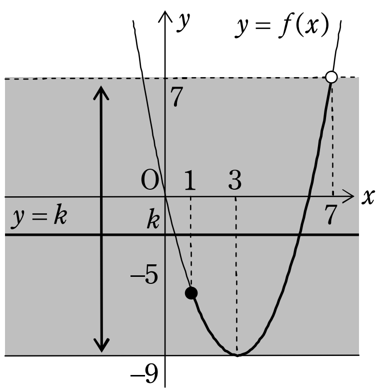
(2) 求める k の範囲は，$y=f(x)$ の $1 \leqq x<7$ の部分と，$y=k$ のグラフが，接する場合も含めて 2 点で交わるような k の範囲と言い換えられるので，グラフより

$\boxed{-9 \leqq k \leqq -5}$



(3) 求める k の範囲は，$y=f(x)$ の $1 \leqq x<7$ の部分と，$y=k$ のグラフが，交点をもつような k の範囲と言い換えられるので，グラフより

$\boxed{-9 \leqq k<7}$



宿題 8-2

I)　$C: y=x^2+8$，　$l: y=2m(x+1)$

(1)　l は傾き $\boxed{2m}$ で，定点 $\boxed{(-1,0)}$ を通る直線.

(2)　C と l が接するとき，接点の x 座標を解にもつ方程式

$x^2+8=2m(x+1)$

$\therefore x^2-2mx-2m+8=0$ ……………… ②

は重解をもつ.

②を平方完成すると

$(x-m)^2=m^2+2m-8$ ……………… ③

なので，この方程式が重解をもつことから，

$m^2+2m-8=0$

$(m+4)(m-2)=0$

$\therefore m=-4,2$

これらの m の値に対して，③は $x=m$ を重解にもち，これが接点の x 座標であるから，

$$\boxed{\begin{array}{c} m=-4\text{のとき接点の座標は}(-4,24) \\ m=2\text{のとき接点の座標は}(2,12) \end{array}}$$

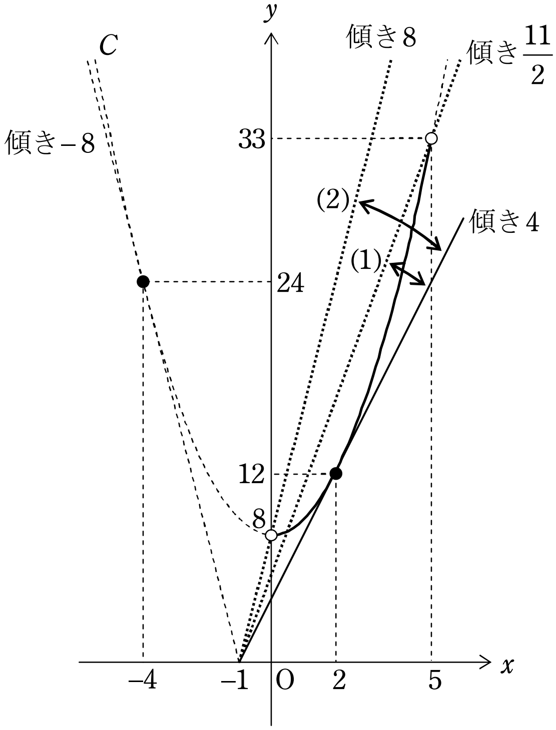
II)　方程式①は，I) (2)の②と同じ方程式であり，$C: y=x^2+8$ と $l: y=2m(x+1)$ の交点の x 座標を解にもつ方程式である.

I) より，l は

傾き $2m=-8$ のとき，$(-4,24)$ で，

傾き $2m=4$ のとき，$(2,12)$ で

C と接している.



(1)　求める m の範囲は，C の $0<x<5$ の部分と，l が，接する場合も含めて 2 点で交わるような m の範囲と言い換えられる.

グラフより，条件を満たすような l の傾き $2m$ の範囲は $4 \leqq 2m < \dfrac{11}{2}$ なので，m の範囲は，$\boxed{2 \leqq m < \dfrac{11}{4}}$.

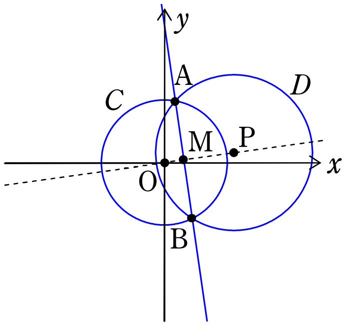
(2)　求める m の範囲は，C の $0<x<5$ の部分と l が交わるような m の範囲と言い換えられる.

グラフより，条件を満たすような l の傾き $2m$ の範囲は $4 \leqq 2m < 8$ なので，m の範囲は，$\boxed{2 \leqq m < 4}$.

宿題 8-3

$C: x^2+y^2=10$ ……………………………… ①

$D: x^2+y^2-7x-y=3$ ………………………… ②



(1) C, D の 2 交点 A, B の座標は①, ②を満たすので,

①－②: $\boxed{7x+y=7}$ ……………………… ③

も満たす．よって，③の表す直線は A, B を通るので，これが直線 AB の式に他ならない．

(2) (1)を利用する，2 つの方針を挙げる．

［方針 I］

A, B は円 C と直線 AB の 2 交点でもあるので，その座標は

$$\begin{cases} ① \\ ③ \end{cases}$$

の解である．A, B の x 座標 α, β は，③より $y=-7x+7$ を①に代入した

$$x^2+(-7x+7)^2=10$$

$$50x^2-98x+39=0$$

の 2 解であるから，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=\frac{98}{50}$$

したがって，M の x 座標は $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{49}{50}$ であり，M は直線 AB 上の点なので，y 座標は③より，

$$-7\cdot\frac{49}{50}+7=7\left(1-\frac{49}{50}\right)=\frac{7}{50}$$

よって，M$\boxed{\left(\dfrac{49}{50},\dfrac{7}{50}\right)}$ である．

［方針 II］

D の中心を P とする．

弦 AB の垂直二等分線は C の中心 O, D の中心 P を通るので，M は直線 OP 上の点であり，直線 AB と直線 OP の交点である．D の式を平方完成すると

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{31}{2}$$

なので，中心は P$\left(\dfrac{7}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ であり，直線 OP の式は

$y=\dfrac{1}{7}x$ ………………………………………… ④

である．直線 AB との交点の座標は

$$\begin{cases} ③ \\ ④ \end{cases}$$

の解なので，これを解いて

M$\boxed{\left(\dfrac{49}{50},\dfrac{7}{50}\right)}$

が求まる．

宿題 8-4

$N = 3^{2015} + 2$

(1) $N \equiv 1^{2015} + 0 \equiv 1 \pmod 2$

なので，N を 2 で割った余りは $\boxed{1}$．

$N \equiv 0^{2015} + 2 \equiv 2 \pmod 3$

なので，N を 3 で割った余りは $\boxed{2}$．

$N \equiv (-1)^{2015} + 2 \equiv -1 + 2 \equiv 1 \pmod 4$

なので，N を 4 で割った余りは $\boxed{1}$．

$3^4 \equiv 81 \equiv 1 \pmod 5$ に注目すると，

$3^{2015} = 3^{4\times503+3} = (3^4)^{503} \times 3^3$

より，

$N \equiv 1^{503} \times 27 + 2 \equiv 1 \times 2 + 2 \equiv 4 \pmod 5$

なので，N を 5 で割った余りは $\boxed{4}$．

(2) 整数 x に対して，x^2 の mod 3 での値は，下の表より，0, 1 のいずれかである．

$x \pmod 3$	0	1	2
$x^2 \pmod 3$	0	1	1

一方，(1)より，$N \equiv 2 \pmod 3$ であるから，N は平方数でない．

※ mod 2, mod 4 での平方数の値は 1 になりうるので，$N \equiv 1 \pmod 2$, $N \equiv 1 \pmod 4$ からは，N が平方数か否かを判断することはできない．
mod 5 での平方数の値は 4 になりうるので，$N \equiv 4 \pmod 5$ からも，N が平方数か否かを判断することはできない．

宿題 8-5

(1) $t^3 - 3t + 2 = 0$

$f(t) = t^3 - 3t + 2$ とおくと，

$f(1) = 0$

なので，$f(t)$ は $t-1$ で割り切れることが分かり，

$$f(t) = (t-1)(t^2 + t - 2)$$
$$= (t-1)(t+2)(t-1) = (t-1)^2(t+2)$$

と因数分解される．よって，$f(t) = 0$ の解は，$\boxed{t = 1, -2}$．

(2) $(x^2 + 3x)^3 - 3(x^2 + 3x) + 2 = 0$

$t = x^2 + 3x$ とおくと，方程式は

$t^3 - 3t + 2 = 0$

となり，この解は，(1)より，$t = 1, -2$．
したがって，求める方程式は

$x^2 + 3x = 1$ 　または　 $x^2 + 3x = -2$

と言い直せる．
それぞれの 2 次方程式を解いて，

$$\boxed{x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}, -1, -2}$$

(3) $x^6 - 3x^2 + 2 = 0$

$t = x^2$ とおくと，方程式は

$t^3 - 3t + 2 = 0$

となり，この解は，(1)より，$t = 1, -2$．
したがって，求める方程式は

$x^2 = 1$ 　または　 $x^2 = -2$

と言い直せる．
後者は実数解を持たず，求める解は

$\boxed{x = \pm 1}$