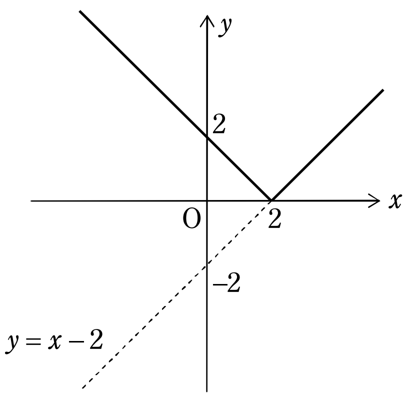
中3数学D　宿題解答　2学期-9

宿題 9-1

(1)　　$y=|x-2|$

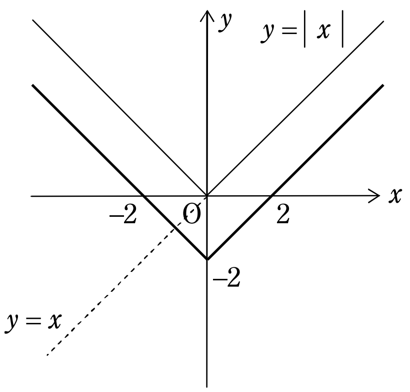
のグラフは，$y=x-2$ のグラフの x 軸より下の部分を x 軸で折り返したものであるから，下図太線部分.



(2)　　$y=|x|-2$

のグラフは，$y=|x|$ のグラフを y 軸方向に −2 平行移動したものであり，$y=|x|$ のグラフは，$y=x$ のグラフの x 軸より下の部分を x 軸で折り返したものである.

よって，$y=|x|-2$ のグラフは下図太線部分.

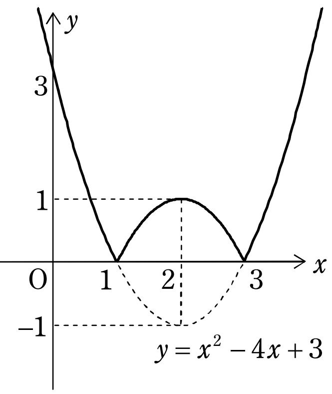


(3)　　$y=|x^2-4x+3|$

のグラフは,

$y=x^2-4x+3\ \left(=(x-1)(x-3)\right)$

のグラフの x 軸より下の部分を x 軸で折り返したものであるから，下図太線部分.



(4)　　$y=|x^2-4x|+3$

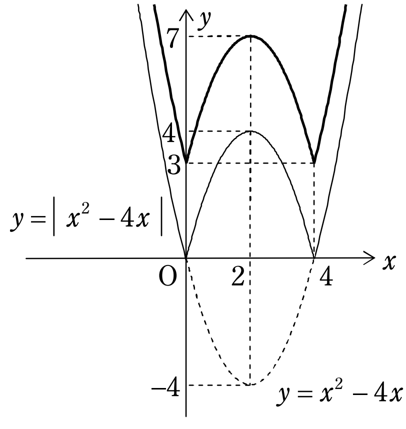
のグラフは，$y=|x^2-4x|$ のグラフを y 軸方向に +3 平行移動したものであり，

$y=|x^2-4x|$ のグラフは,

$y=x^2-4x\ \left(=x(x-4)\right)$

のグラフの x 軸より下の部分を x 軸で折り返したものである.

よって，$y=|x^2-4x|+3$ のグラフは下図太線部分.



宿題 9-2

(1) $\left| x^2-3x \right| - x = 0$

$\therefore \left| x^2-3x \right| = x$

の（実数）解は,

$$\begin{cases} y = \left| x^2-3x \right| \\ y = x \end{cases}$$

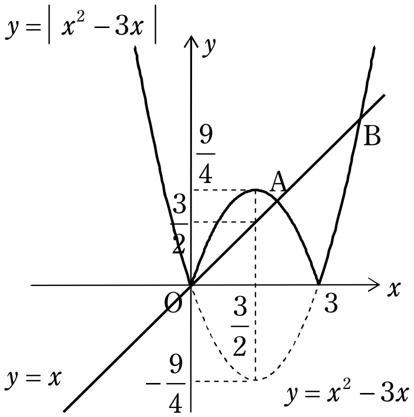
のグラフの交点の x 座標に他ならない.

ここで, $y = \left| x^2-3x \right|$ のグラフは,

$y = x^2-3x \ \left(= x(x-3)\right)$

のグラフの x 軸より下の部分を x 軸で折り返したもの.

下図のように，グラフの交点は 3 点であることが分かり，一つは O であるから，残りの 2 交点を左から A, B とする.



O, A は

$$\begin{cases} y = -(x^2-3x) \\ y = x \end{cases}$$

のグラフの 2 交点であり，これらの x 座標は

$-(x^2-3x) = x \quad \therefore x^2-2x=0$

を解いて, $x = 0, 2$.

O, B は

$$\begin{cases} y = x^2-3x \\ y = x \end{cases}$$

のグラフの 2 交点であり，これらの x 座標は

$x^2-3x = x \quad \therefore x^2-4x=0$

を解いて, $x = 0, 4$.

以上より，方程式の解は $\boxed{x = 0, 2, 4}$.

(2) $\left| x^2-3x \right| - x + 1 = 0$

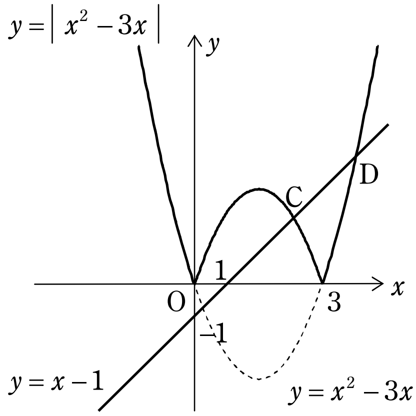
$\therefore \left| x^2-3x \right| = x-1$

の（実数）解は,

$$\begin{cases} y = \left| x^2-3x \right| \\ y = x-1 \end{cases}$$

のグラフの交点の x 座標に他ならない.

下図のように，グラフの交点は 2 点であることが分かり, これらを左から C, D とする.



C は

$$\begin{cases} y = -(x^2-3x) \\ y = x-1 \end{cases}$$

のグラフの交点のうち, $0 < x < 3$ の範囲にあるものであるから，C の x 座標は

$-(x^2-3x) = x-1 \quad \therefore x^2-2x-1=0$

の 2 解 $x = 1 \pm \sqrt{2}$ のうち, $0 < x < 3$ を満たす方である, $1+\sqrt{2}$ と分かる.

D は

$$\begin{cases} y = x^2-3x \\ y = x-1 \end{cases}$$

のグラフの交点のうち, $3 < x$ の範囲にあるものであるから, D の x 座標は

$x^2-3x = x-1 \quad \therefore x^2-4x+1=0$

の 2 解 $x = 2 \pm \sqrt{3}$ のうち, $3 < x$ を満たす方である, $2+\sqrt{3}$ と分かる.

以上より，方程式の解は

$\boxed{x = 1+\sqrt{2}, 2+\sqrt{3}}$

である.

宿題 9-3

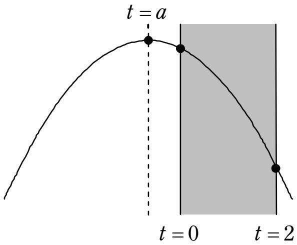
(1) $y=f(t)$

$=-t^2+2at$

$=-(t-a)^2+a^2$

の頂点の t 座標 a に注目して場合を分けると，$0\leqq t\leqq 2$ における $y=f(t)$ の値域は,

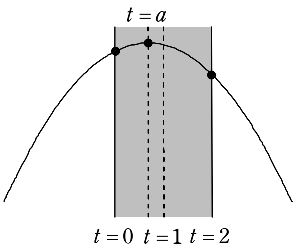
i) $a\leqq 0$ のとき



グラフより,

$f(2)\leqq y\leqq f(0)$ $\therefore 4a-4\leqq y\leqq 0$

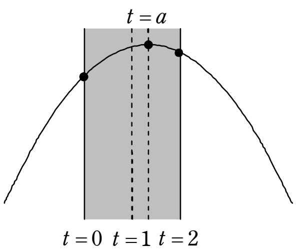
ii) $0\leqq a\leqq 1$ のとき



グラフは $t=a$ に関して対称なので,

$f(2)\leqq y\leqq f(a)$ $\therefore 4a-4\leqq y\leqq a^2$

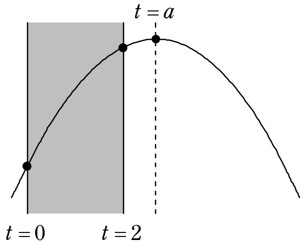
iii) $1\leqq a\leqq 2$ のとき



グラフは $t=a$ に関して対称なので,

$f(0)\leqq y\leqq f(a)$ $\therefore 0\leqq y\leqq a^2$

iv) $2\leqq a$ のとき



グラフより,

$f(0)\leqq y\leqq f(2)$ $\therefore 0\leqq y\leqq 4a-4$

以上をまとめて,

$a\leqq 0$	のとき	$4a-4\leqq y\leqq 0$
$0\leqq a\leqq 1$	のとき	$4a-4\leqq y\leqq a^2$
$1\leqq a\leqq 2$	のとき	$0\leqq y\leqq a^2$
$2\leqq a$	のとき	$0\leqq y\leqq 4a-4$

(2) 通過領域 W と直線 $x=a$ の交わりは，直線 $y=2tx-t^2$ 上の x 座標 a の点

$\mathrm{A}(a, 2at-t^2)$

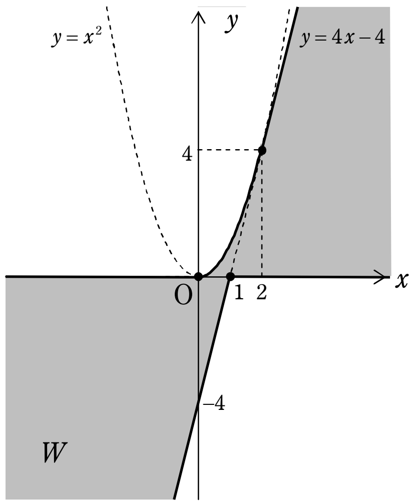
が動いてできた図形である．この図形は,

$0\leqq t\leqq 2$ のとき，A の y 座標

$2at-t^2$

の動く範囲で定まるが，これは(1)で計算した $y=f(t)$ の値域に他ならない.

したがって，W は下図の通り（境界はすべて含む）.



宿題 9-4

$\left| x^2-4x \right| - kx - 2k = 0$

$\therefore \left| x^2-4x \right| = k(x+2)$

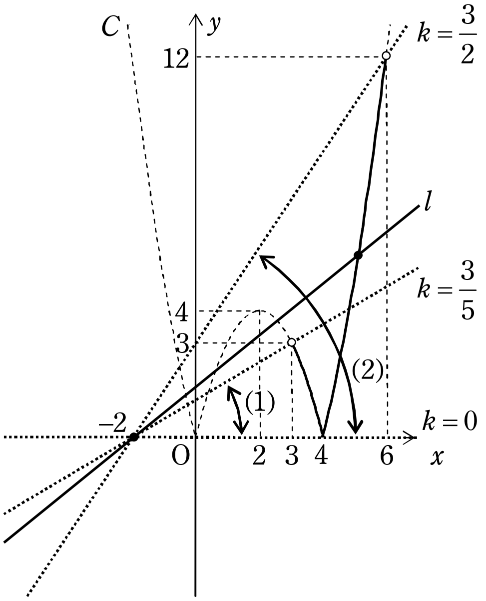
の（実数）解は,

$$\begin{cases} C: y = \left| x^2-4x \right| \\ l: y = k(x+2) \end{cases}$$

のグラフの交点の x 座標に他ならない．

l は，傾き k で，x 切片 -2 の直線である．

(1) l が，C の $3<x<6$ の部分と異なる 2 点で交わるような，l の傾き k の範囲であるから，下図より，$\boxed{0<k<\frac{3}{5}}$．



(2) l が, C の $3<x<6$ の部分と少なくとも 1 点で交わるような，l の傾き k の範囲であるから，上図より，$\boxed{0 \leqq k<\frac{3}{2}}$．

(3) 求めるものは，l が，C の $1<x<6$ の部分と異なる 3 点で交わるような，l の傾き k の範囲である．

l が，C の $0<x<4$ の部分と接するときの様子が問題になるので，これについて調べる．

$0<x<4$ では,

$$\begin{cases} C: y = -x^2+4x \\ l: y = k(x+2) \end{cases}$$

であるから，まず，この範囲の C と l が接するような k の値と接点の x 座標を求める．

接点の x 座標は

$-x^2+4x = k(x+2)$

$\therefore x^2+(k-4)x+2k=0$ ……………………… ①

の重解である．平方完成

$\left(x+\frac{k-4}{2}\right)^2 = \frac{(k-4)^2}{4} - 2k$ ………… ②

より，①が重解をもつのは

$\frac{(k-4)^2}{4} - 2k = 0$

$k^2-16k+16=0$

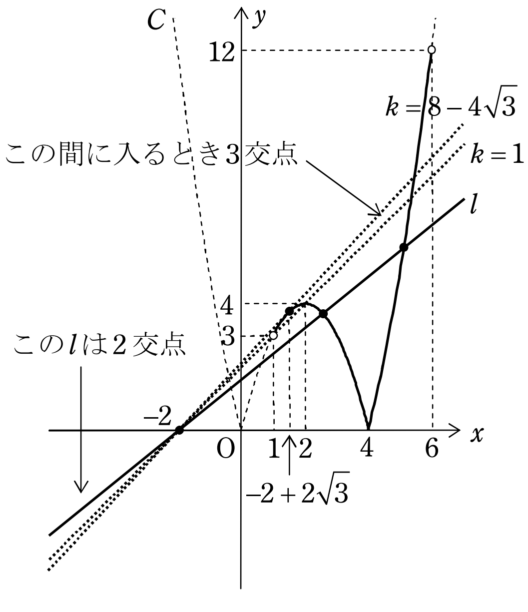
$\therefore k = 8 \pm 4\sqrt{3}$

のときであり, これらの k の値に対して，①の重解は，②より

$x = -\frac{k-4}{2} = -(2 \pm 2\sqrt{3}) = -2 \mp 2\sqrt{3}$．

このうち，$0<x<4$ の範囲にあるものは $k=8-4\sqrt{3}$ のときの $x=-2+2\sqrt{3}$ であり，$x=-2+2\sqrt{3}$ は $1<x<6$ の範囲に含まれる．

このことと，点 $(1, 3)$ を通るときの傾き $k=1$ を合わせて，下図を得る．



よって，異なる 3 交点をもつような l の傾き k の範囲は，$\boxed{1<k<8-4\sqrt{3}}$．