

1日目

§1 確率とは

学習ノート 安永
B3 4-A / 日 3 月 9 日 月
講座名: 中3 数学 I

△ が起こる確率を $P(\Delta)$ と書く
(probability)

1-1

出る目:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

起こりやすさの比: 2 1 1 1 1 1
確率: $\frac{2}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ → 全ての合計は 1 になる

- (1) $P(1 \text{ の目が出る}) \rightarrow \frac{2}{7}$
- (2) $P(3 \text{ 以下の目が出る}) \rightarrow \frac{4}{7}$ $\frac{2}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$
- (3) $P(4 \text{ 以上の目が出る}) \rightarrow \frac{3}{7}$ $\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$
- (4) $P(1 \text{ 以上 } 6 \text{ 以下の目が出る}) \rightarrow 1$
- (5) $P(7 \text{ の目が出る}) \rightarrow 0$

確率とは起こりやすさの比を合計が 1 になるように数値化したもの

1-1a

血液型:

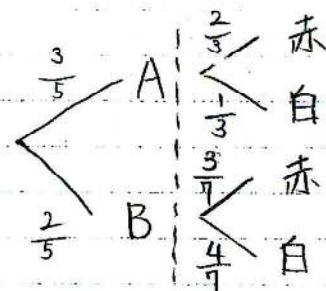
A	O	B	AB
---	---	---	----

起こりやすさの比: 4 3 2 1
確率: $\frac{4}{10}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{1}{10}$
($\frac{2}{5}$)

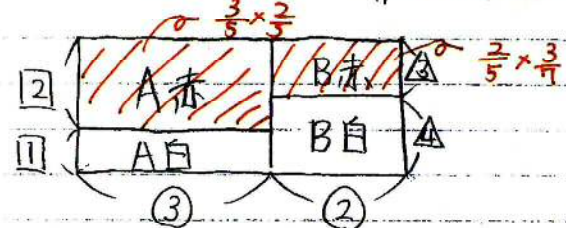
- (1) $P(B \text{ 型である}) \rightarrow \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$
- (2) $P(A \text{ 型 または } O \text{ 型である}) \rightarrow \frac{7}{10}$

1.2

(1)



- (2)(i) $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$
- (ii) $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$
- (iii) $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ 足し算



問 2.1 a

$$A \text{ 表} \rightarrow \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \quad B \text{ 表} \rightarrow \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16} \quad \frac{3}{8} + \frac{3}{16} = \frac{9}{16}$$

問 1.3

(1) 左 真ん中 右 $\frac{1}{2}$

- (2) 5 回のうち 2 回が上
 - (i) $P(\text{点 C を通る}) \rightarrow \frac{1}{4}$
 - (ii) $P(\text{点 D 〃}) \rightarrow \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{2}$
 - (iii) $P(\text{点 E 〃}) \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
 - (iv) $P(\text{点 F 〃}) \rightarrow \frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$

問 1.4

- (1) 表の確率 $\frac{2}{3}$ 裏の確率 $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$
- (2) $\frac{4}{27} \times 3 = \frac{4}{9}$
- (3) $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = \frac{8}{27}$

問 1.4 a

$$1 \rightarrow \frac{2}{7} \quad 2 \sim 6 \rightarrow \frac{1}{7} \quad \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{7} \times 3 = \frac{60}{343}$$

問 1.4 b

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{3 \times 5 \times 4 \times 2}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{15}{16}$$

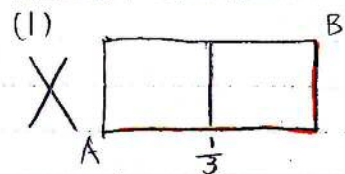
問 1.4 c

$$(1) \frac{2}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{1}{7} \times (n-1) \quad (2) \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{(n-2)}{7} \times \frac{n+(n-1)}{2 \times 1} = \frac{4}{49} \times \frac{5}{7} \times \frac{(n-2)}{7} \times (n-1)$$

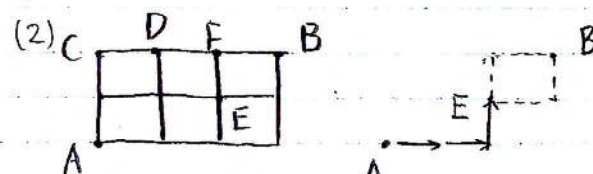
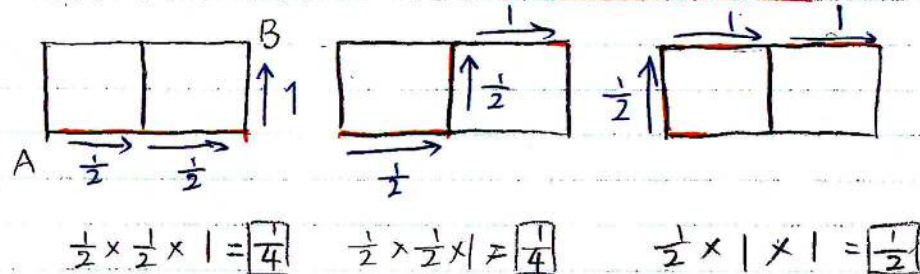
C 1-1

- (1)(i) $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$
- (ii) $M_1, W_1 \rightarrow \frac{4}{9} \quad M_1, W_2 \rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \rightarrow \frac{2}{9} \quad \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$
- (2) $(M_1, W_1)(M_2, W_2) \rightarrow \frac{4}{9} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{81}$
- $(M_1, W_2)(M_2, W_1) \rightarrow \frac{2}{9} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{81} \quad \frac{4}{81} \times 2 = \frac{8}{81}$

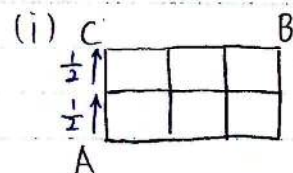
1-3 解説



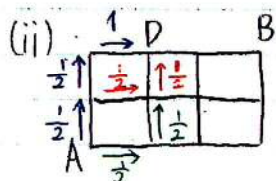
「AからBへの経路は上の3通りだから確率ずつ」とするのは誤り！
見かけにだまされない！
正しくは A から B まで右か上に等確率で進むので



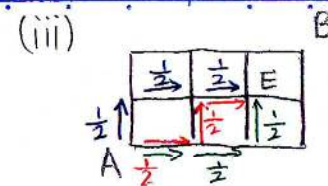
※例えば、(iii)で「Eを通る」確立などを求めるとき
 $P(E \text{ を通り、} B \text{ に行く}) = P(A \rightarrow E) \times P(E \rightarrow B)$
 $= P(A \rightarrow E) \times 1$ 確率1
 となるので結局「AからEに進む」確率のみ Eから絶対Bに
 考えることとする。 たどりつく



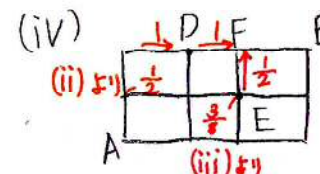
$$P(C \text{ を通る}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



$$P(D \text{ を通る}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



$$P(E \text{ を通る}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$



全てを1から考えるのではなく、
工夫する(ii)(iii)を利用)

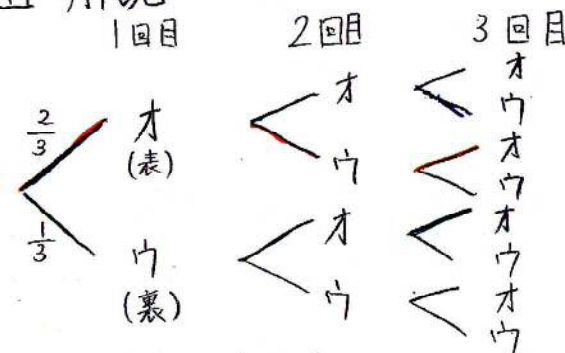
$$P(F \text{ を通る}) = P(A \rightarrow D \text{ で } D \rightarrow F) + P(A \rightarrow E \text{ で } E \rightarrow F)$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 + \frac{3}{8} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{16}$$

$$= \frac{11}{16}$$

1-4 解説



(1) $P(\text{オ、ウ、オの順に出る})$
 $= \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$

(2) $P(\text{オが2回、ウが1回出る})$ ← 順番が決まっていな
 $= P(\text{オオウ}) + P(\text{オウオ}) + P(\text{ウオオ})$
 $= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$
 $= \frac{4}{27} \times 3$
 $= \frac{4}{9}$

別解: まず $P(\text{オオウの順に出る}) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$ である。
次に ウが3回中何回出るかで3(1通りの
場合があるから
 $\frac{4}{27} \times 3 = \frac{4}{9} \times 3 = \frac{4}{3}$

C1-3

(1) (i) $P = \frac{1}{4}$

(ii) $q = \frac{1}{3}$

(2) (i) $\frac{1}{4} : \frac{2}{4} \times \frac{1}{4} = 4:3$

(ii)

$r = \frac{4}{7}$

1-4

(3) まず、 P (オオウウの順に出る)

$$= \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{4}{81}$$

であり、2回のオが4回中どの2回に出るか ${}_4C_2$ 通り
あるので

$$\frac{4}{81} \times {}_4C_2 = \frac{4}{81} \times 6 = \frac{8}{27}$$

1-4a

まず、 P (1,1,1以外の順に出る)

$$= \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{20}{343}$$

$$\frac{20}{343} \times {}_3C_2 = \frac{60}{343}$$

なので

3回中どの2回がオか

1-4b

$P(\text{合格}) = P(4\text{題解ける}) + P(5\text{題解ける}) + P(6\text{題解ける})$

$$= {}_6C_4 \left(\frac{1}{2} \right)^4 \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 + {}_6C_5 \left(\frac{1}{2} \right)^5 \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^6$$

6題中どの4題 2題

4題が解ける 正解 ミス

$$= \frac{15}{2^6} + \frac{6}{2^6} + \frac{1}{2^6} = \frac{22}{2^6} = \frac{11}{32}$$

1-4c

(1) ${}_nC_1 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6} \right)^{n-1} = \frac{n \times 5^{n-1}}{6}$

1か何回 1か 1以外が $\frac{5}{6}^{n-1} = \frac{5 \times \dots \times 5}{6^{n-1}}$ $n-1$ 回 $n-1$ 回 出るか 1回 $n-1$ 回 になるので注意

(2) ${}_nC_2 \times \left(\frac{1}{6} \right)^2 \times \left(\frac{5}{6} \right)^{n-2}$

$$= \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{1}{6^2} \times \frac{5^{n-2}}{6^{n-2}}$$

$$= \frac{n(n-1) \times 5^{n-2}}{2 \times 6^n}$$

7°プリント

(1) 右に3歩 だけ進むので
左に3歩

$${}_6C_3 \times \left(\frac{1}{3} \right)^3 \times \left(\frac{2}{3} \right)^3 = \frac{160}{729}$$

どの3歩か 右3歩 左3歩
左か

$$(2) \left({}_2C_1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \right) \times \left({}_4C_2 \times \left(\frac{1}{3} \right)^2 \times \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right)$$

最初の2歩で原点 次の4歩で原点

$$= \frac{32}{243}$$

(3) { 右に5歩 進む
左に3歩

$${}_8C_5 \left(\frac{1}{3} \right)^5 \times \left(\frac{2}{3} \right)^3 = \frac{448}{6561}$$

この5歩が右に5歩 左に5歩か

C1-3

(1) (i) $p = P(1 \text{ の目が出るとき}) = \frac{1}{4}$ 無限に続く

(ii) $g = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \dots$

1が出る 4が出て1が出る 2回 1が出る
やり直し やり直し

つまり $g = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{1}{4} \right)^3 + \left(\frac{1}{4} \right)^4 + \dots$

どうやる?

$$4g = 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{1}{4} \right)^3 + \dots \quad 4 \text{倍がポイント}$$

$$-) \quad g = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} \right)^2 + \left(\frac{1}{4} \right)^3 + \dots$$

$$3g = 1$$

よって $g = \frac{1}{3}$

$a = 0.1111 \dots$ を分数にするとき

$$10a = 1.1111 \dots$$

$$-) \quad a = 0.1111 \dots$$

$$9a = 1$$

$$a = \frac{1}{9}$$

別解



勝敗に関係あるのはこのみ
(やり直しは無視)

勝敗はAとBで

1:2 なので

$$g = \frac{1}{3}$$

別解2

$$g = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times g$$

なぜこの式で求めるのか

2日目

2 確率の計算法則

楽に計算する方法を学ぶ

「Aでない」という意味のものを $\bar{A}$ (エーバー) と書き、
「Aの余事象」という

このとき

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

が成り立つ



(例) ふつうのコインを10回投げるとき

A: 表が1回以上出る

とすると $P(A)$ は?

→ $P(\bar{A})$ を考える $\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$
「表が1回も出ない
(10回とも裏)」

Aをまともに考えると...

「表が1回出る場合」

「表が2回」

「表が3回」

...

「表が10回」

大変...
余事象を使うと便利

$$P(\bar{A}) = \frac{1}{1024} \text{ なので、}$$

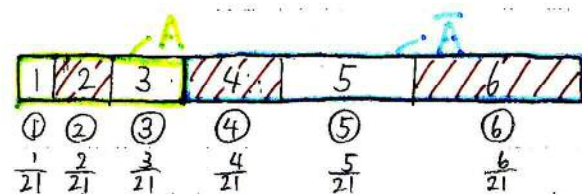
$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

$$= 1 - \frac{1}{1024}$$

$$= \frac{1023}{1024}$$

問2-1から順番に演習

2-1



$$(1) P(A) = \frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{3}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

$$(2) P(\bar{A}) = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

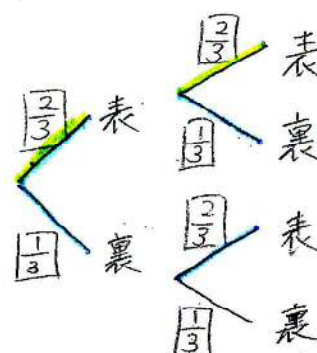
2-1a

$$(1). P(B) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} \quad (2). P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$$

余事象は使っても使わなくても良い

2-2

(1)



$$(2)(i) P(\text{オが2回}) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$(ii) P(\text{オが1回}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$(iii) P(\text{オが出ない}) = P(\text{2回ともウ}) = \frac{1}{9}$$

$$(iv) P(\text{オが1回以上}) = 1 - P(\text{オが出ない}) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{または} \\ P(\text{オが1回以上}) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \end{array} \right)$$

2-2a

「以上」「少なくとも」が問題文にあるときは余事象を使うかも

(1) $P(\text{オが少なくとも1回出る})$

$$= 1 - P(\text{4回ともウ}) \quad \leftarrow \text{余事象}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$= 1 - \frac{1}{81}$$

$$= \frac{80}{81}$$

(2) $P(\text{オが少なくとも2回})$

$$= 1 - P(\text{オが0回}) - P(\text{オが1回})$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$= 1 - \frac{1}{81} - 4 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$= \frac{81}{81} - \frac{1}{81} - \frac{8}{81} = \frac{72}{81} = \frac{8}{9}$$

2-2b

$P(\text{少なくとも1回1が出る})$

$$= 1 - P(\text{n回とも1以外})$$

$$= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \quad \leftarrow n \text{回とも2か3か4か5か6がでる}$$

2-3

$$(1) P(A) = \frac{2}{7} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{2-1より} \\ (2) P(B) = \frac{4}{7} \end{array} \right.$$

$$(3) P(A \cap B) = \frac{2}{21}$$

$$(4) P(A \cup B) = \frac{2}{21} + \frac{4}{21} - \frac{2}{21} = \frac{4}{7}$$

	B	$\bar{B}$	計
A	2/21	2/21	4/21
$\bar{A}$	2/21	1/21	3/21
計	4/21	3/21	1

$$(5) P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{21}$$

	B	$\bar{B}$	計
A	2/21	2/21	4/21
$\bar{A}$	2/21	1/21	3/21
計	4/21	3/21	1

(4)(5)はカルノー図を描いて情報を整理する

ピンクの所は(1)~(3)よりわかっている
残りは引き算で求める

2つの物事A, Bについて考えるときはカルノー図が便利

2-3a

	B	$\bar{B}$	計
A	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
$\bar{A}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
計	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

(1) $P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$

(2) $P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{12}$

2-3b

(1)

	Y	$\bar{Y}$	計
X	$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{3}$
$\bar{X}$	$\frac{1}{15}$		$\frac{1}{15}$
計	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

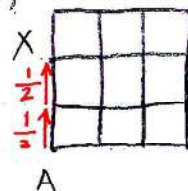
$P(X \cap Y) = \frac{1}{15}$

$P(X \cup Y) = \frac{4}{5}$

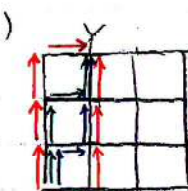
$P(X \cap Y) = \frac{1}{15}$

2-4

(1) $P(X \text{ を通る}) = \frac{1}{4}$



(2) $P(Y \text{ を通る}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$



(2)

	Y	$\bar{Y}$	計
X	$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{12}$
$\bar{X}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
計	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

$P(X \cap Y) = \frac{1}{12}$

(3) XもYも通るのは
(2)のうちピンク色のルートなので
 $P(X \text{ も } Y \text{ も通る}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$

	Y通る	Y通らない	計
X通る	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
X通らない	$\frac{2}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{3}{4}$
計	$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{16}$	1

(4) $\frac{3}{16} + \frac{1}{16} + \frac{2}{16} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

(5) $\frac{5}{8}$

2-4a

(1) $P(1 \text{ の目が少なくとも1回出る}) = 1 - P(1 \text{ 以外の目が出る}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$
2か3か4か5か6か出る確立

(2) (1)と同じく $\frac{175}{256}$

(3), (4) はカルノー図を書く

(3) $\frac{110}{256} + \frac{65}{256} + \frac{65}{256} = \frac{240}{256} = \frac{15}{16}$

(4) $\frac{110}{256} = \frac{55}{128}$

	6が出る	6が出ない	計
1が出る	$\frac{110}{256}$	$\frac{65}{256}$	$\frac{175}{256}$
1が出ない	$\frac{65}{256}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^4$	$\left(\frac{5}{6}\right)^4$
計	$\frac{175}{256}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^4$	1

2 or 3 or 4 or 5 が4回
一番簡単なのは 1が出ない $\cap$ 6が出ない
それぞれが簡単に求まる

2-4b

(1) $P(M_1 \text{ がカッポル成立}) = P(M_1 \cap W_1) + P(M_1 \cap W_2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$

(4)

	M_2 成立	M_2 成立は	計
M_1 成立	$\frac{8}{81}$	$\frac{46}{81}$	$\frac{2}{3}$
M_1 成立は	$\frac{19}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{3}$
計	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

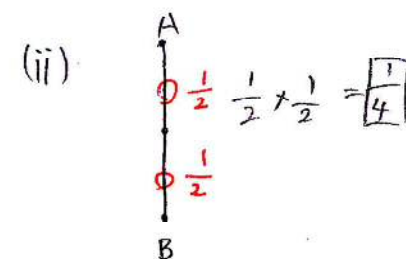
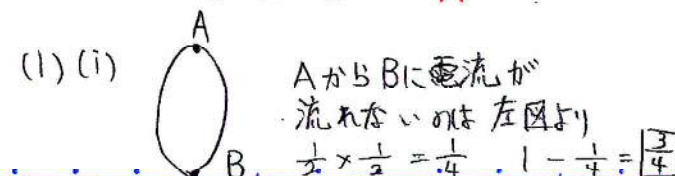
(4) $\frac{19}{81} + \frac{46}{81} = \frac{65}{81}$ (5) $\frac{8}{81}$

(3) $P(M_1 \text{ と } M_2 \text{ もカッポル成立}) = P(M_1 \cap W_1 \cap M_2 \cap W_2) + P(M_1 \cap W_2 \cap M_2 \cap W_1) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{81} + \frac{2}{81} = \frac{6}{81} = \frac{2}{27}$

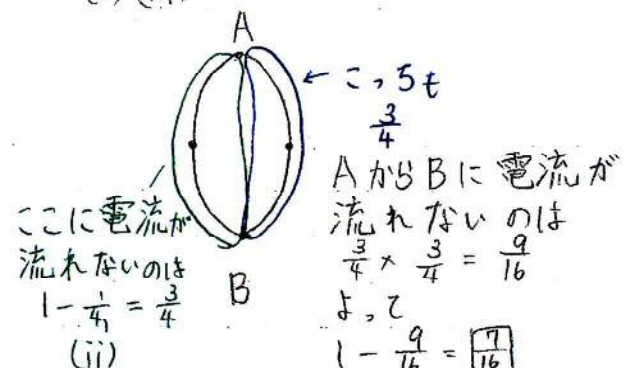
(2) $P(M_2 \text{ がカッポル成立}) = P(M_2 \cap W_1) + P(M_2 \cap W_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

(2-2)

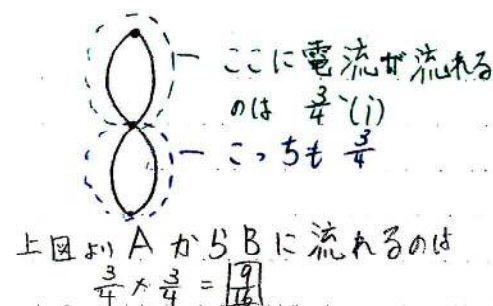
{ 電流が流れると $\bigcirc$
 ' が流れないと $\times$



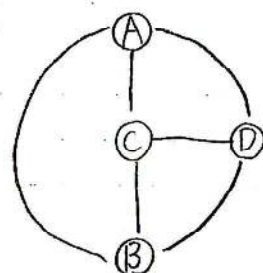
(2) (iii)



(iv)

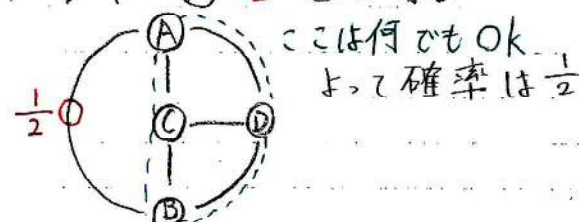


(3)



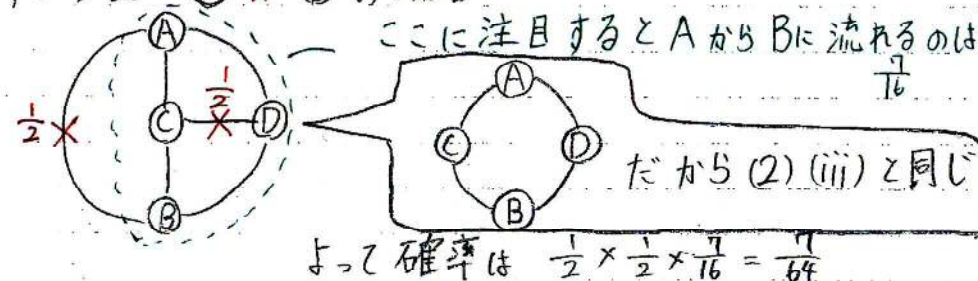
よりシンプルな図で解く

パターン1 A ⊕ B の場合



以下 A × B の場合を考える。

パターン2 C × D の場合



パターン3 C ⊕ D の場合



よって確率は $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{9}{16} = \frac{9}{64}$

3日目

模範テスト 裏面

$$1+2+3+4+5+\dots = (2^0+2^1+2^2+\dots)(3^0+3^1+3^2+\dots)$$

$2^0 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0 \dots$
 $2^1 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0 \dots$
全ての数字を表せる

全ての自然数の和になる

<テキスト>

例 Y君は次の宝くじを買った。

1億	100万	外れ
1コ	9コ	990コ

- (1) 1億が当たった確率は?
- (2) Y君は当選番号を見たとき、「当たった!」と叫んだ。
このとき1億円が当たった確率は?

(1) は普通に $\frac{1}{1000}$

では...

- (2) 出た意見 $1, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10}$
答え: 当たったという情報があるので

1億	100万	外れ
1コ	9コ	990コ

この当たり10コが全体
そのうち1億は1コ
と考えれば

$$\frac{1}{10} \quad (\leftarrow \text{与えられた条件によつて確率が変化})$$

この例のように 条件(情報)を与えると確率は変わる。

「Aが起ったという条件が与えられたときに
Bが起る確率」のことを

$P(B|A)$ と書く。(世界での書き方)

($P_A(B)$ とも書くが、日本の数学のみ)

ちなみに

$P(\quad)$ は「Probability of given」なので

(Aが与えられたときのBの確率)

この1は given と解釈しておこう!

先程の例においては

$\begin{cases} A: \text{当たった} \\ B: 1億当たった} \end{cases}$

とすると、

	B(1億)	B(1億以外)	計
A(当たり)	$\frac{1}{1000}$	$\frac{9}{1000}$	$\frac{10}{1000}$
A(外れ)	0	$\frac{990}{1000}$	$\frac{990}{1000}$
	$\frac{1}{1000}$	$\frac{999}{1000}$	1

右図より

$$P(B|A) = \frac{\frac{1}{1000}}{\frac{10}{1000}}$$

$$= \frac{1}{10}$$

と求めることもできる

当たりとわかっているんで、
これが全体

そのうち1億はこれだけ

一般に
公式

	B	B̄	計
A	1	9	10
Ā	0	990	990
計	1	999	1000

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

※一発でもとめられなさそうなときに使う

3-1

A	1	2	3	4	5	6
計	1	1	1	1	1	1

- (1) $P(B) = \frac{4}{6}$
- (2) $P(B|A) = \frac{3}{4}$

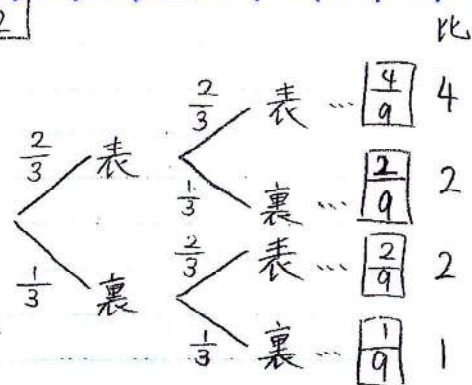
3-1a

A	1	2	3	4	5	6
計	1	1	1	1	1	1

- (1) $P(C) = \frac{5}{6}$
 $P(C|A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- (2) $P(A) = \frac{4}{6}$
 $P(A|C) = \frac{2}{5}$

3-2

(1)



比

$$(2) P(B) = P(\text{裏が2回}) = \frac{1}{9}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{4}$$

・比を使っても公式を使ってもOK!

3-2a

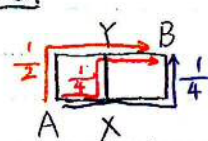
$$(1) P(C) = \frac{8}{9}$$

$$P(C|A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{8}{9}} = \frac{1}{2}$$

$$(2) P(A) = \frac{5}{9}$$

$$P(A|C) = \frac{P(C \cap A)}{P(C)} = \frac{P(\text{表と裏が1回ずつ})}{P(\text{表が1回以上})} = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{8}{9}} = \frac{1}{2}$$

3-2b



$$(1) P(Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

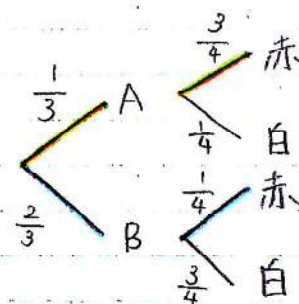
$$(2) P(X) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(X|Y) = \frac{P(Y \cap X)}{P(Y)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

3-2c

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

3-3



$$(1) P = \frac{1}{3}$$

$$(2) 8 = P(A|\text{赤}) = \frac{P(\text{赤} \cap A)}{P(\text{赤})} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}}{\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{12} + \frac{2}{12}} = \frac{1}{5}$$

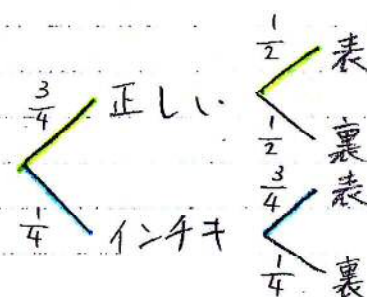
条件つき確率の問題文は長くなりがち...
→ 図などでわかりやすく条件や情報を整理

ちなみに

(1) では $P(A) = \frac{1}{3}$
(2) では $P(A|\text{赤}) = \frac{1}{5}$ 確率があがっている
箱Aでは 赤:白 = 3:1
箱Bでは 赤:白 = 1:3
箱Aの方が赤球が出やすいので、「赤」という条件があれば、Aの確率は高くなる

意味がわかりそうな確率は考察してみる
→ 見直しができる
今日は (1) < (2) が成り立つ

3-3a



$$(1) P = P(\text{インチキ}) = \frac{1}{4}$$

$$(2) P(\text{インチキ}|\text{表}) = \frac{P(\text{表のインチキ})}{P(\text{表})} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{3}{4}}{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{3}{8} + \frac{3}{16}} = \frac{1}{3}$$

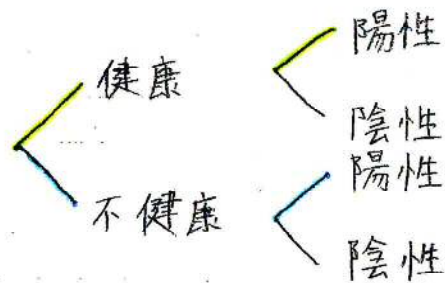
$$(3) P(\text{インチキ}|\text{表表}) = \frac{P(\text{表表のインチキ})}{P(\text{表表})} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}}{\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}} = \frac{\frac{9}{64}}{\frac{9}{64} + \frac{9}{64}} = \frac{1}{2}$$

ちなみに

(1) < (2) となっている
(理由は 3-3 と同様)

正しいかつ表表 インチキかつ表表
= $\frac{9}{12+9} = \frac{3}{7}$

3-4



$$\begin{aligned}
 &P(\text{病気} | \text{陽性}) \\
 &= \frac{P(\text{陽性の病気})}{P(\text{陽性})} \\
 &= \frac{0.02 \times 0.9}{0.98 \times 0.1 + 0.02 \times 0.9} \\
 &= \frac{2 \times 9}{98 \times 1 + 2 \times 9} \\
 &= \frac{9}{58} \approx 0.0161 \\
 &\quad (\text{小数第3位四捨五入})
 \end{aligned}$$

3-4 追加

Q 1回目の検査で陽性
ができたため、2回目の検査
もしたところ陽性だった。
この人が本当にこの病気に
かかっている確率は?

$$\begin{aligned}
 &P(\text{病気} | \text{陽陽}) \\
 &= \frac{P(\text{陽陽の病})}{P(\text{陽陽})} \\
 &= \frac{0.02 \times 0.9 \times 0.9}{0.98 \times 0.1 \times 0.1 + 0.02 \times 0.9 \times 0.9} \\
 &= \frac{2 \times 9 \times 9}{98 \times 1 \times 1 + 2 \times 9 \times 9} \\
 &= \frac{162}{260} = \frac{81}{130} \approx 0.62
 \end{aligned}$$

それでは最後に...

火星人がいることの証明

仮定 { 火星に犬がいない確率は 0.99
 = 猫 0.99

とすると

火星に犬も猫もいない確率は 0.99^2 であり、同様にして
火星に犬も猫も牛もいない確率は 0.99^3 である

〃 100種類の生物が 〃 $0.99^{100} = 0.366 \dots$
〃 1000 〃 $0.99^{1000} = 0.0000431$

なので、余事象を考えると

$P(1000 \text{ 種類のうち少なくとも1種類はいる}) = 1 - 0.0000431$

ほぼ事実... = 0.9999...

この証明は正しい? 正しくない?
→ 正しくない。

この議論のどこがおかしい?

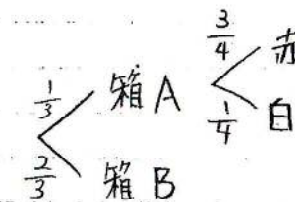
$P(\text{犬も猫もない確率})$
= 0.99×0.99
犬がいない 猫がいない

この式で成り立つ?

つまり

一般に $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ は正しい?

例えば



左図において

$$P(\text{箱A} \cap \text{赤}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$$

$P(\text{箱A})$ $P(\text{赤} | \text{箱A})$
条件つき確率

という計算から見てわかるように
一般には $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
という式はウソで

さっきの議論は
ここがおかしい

→ $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$
が正しい

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ が成り立つとき

例 { A サイコロで1が出る → AとBが全く無関係
 B コインで表が出る (互いに影響をおよぼさない)
 ときのみ成り立つ

さっきの議論では、犬と猫は互いに影響していると
考えられる

4日目

4-1

① ① ① ① ① ①

(1) 1 2 3 4 5 6 - 全部で6

5以下は5

$$P(5以下の目の出る確率) = \frac{5}{6}$$

この問題では、
目の出やすさが均等
→ 比を考えなくて良い

$$(2) P = \frac{r}{n}$$

このように起こりうる全パターンに対して
起こりやすさが均等(1:1:1:1:1:1)と
いえる状況では

→ 「同様に確からしい」という

$$P(A) = \frac{Aとなるパターンの個数}{起こりうる全パターンの個数}$$

と計算できる。

ただし、注意すべきことが1つある。

→ 起こりやすさが均等に
なるのはどんなとき?
(4-2)で確認)

4-2 → 考え方が多様 (考え方によって答えが変わる)

2枚のコインを投げる時 { 表1枚 裏1枚 } になる確率は?

考え方1

コインを区別する

ありえるパターンは

(オ、オ) (オ、ウ) (ウ、オ) (ウ、ウ)

コインA コインB

の4通りなので $\frac{2}{4}$

考え方2

コインを区別しない

ありえるパターンは

(オ、オ) (オ、ウ) (ウ、ウ)

の3通りなので $\frac{1}{3}$

どちらの考え方が
正しい?

4-2(2)にて

(2) クラス24人で1人40回ずつ投げる
データ

(オ、オ) (ウ、オ) (ウ、ウ) (オ、オ) (ウ、オ) (ウ、ウ)

10	16	13	17	17	19
11	18	7	10	23	15
12	19	13	8	22	21
8	26	6	15	18	22
6	25	9	13	20	7
11	19	10	7	18	15
7	27	6	13	19	8
8	23	9	11	20	9
9	20	20	12	19	9
10	19	18	10	15	15
13	18	19	9	21	10
5	24	20	8	22	10

合計 (オ、オ) (オ、ウ) (ウ、ウ)

24 3 48 8 22 9

① : ② : ① < ②

→ (2) より考え方1の方が妥当である

本日の最重要ポイント

4-2を見てわかるように

確率では全てのものを区別して考える!

→ これは実験の結果から得た経験から

決めたルールである!

(証明はできない。)

4-2a

(1) 3枚のコインを100円玉、10円玉、1円玉と
区別して考える 必ず区別する

このときありえる全パターンは

100円玉 10円玉 1円玉
(オ, オ, オ)
(オ, オ, ウ)
(オ, ウ, オ)
(ウ, オ, オ)
(ウ, ウ, ウ)
(オ, ウ, ウ)
(ウ, オ, ウ)
(ウ, ウ, オ)

オ: 2枚 は 3通り
ウ: 1枚

全部で 8通り

より求める確率は

$$\frac{3}{8}$$

個数が増えると、数えあげはつらい...

解答を改良

3枚のコインを全て区別して考えると、
起こりうるのは全部で $2^3 = 8$ 通り あり

1枚目は オ or ウ の 2通り
2枚目
3枚目

この中で オ: 2枚 になるのは
ウ: 1枚
(オ, オ, ウ) (オ, ウ, オ) (ウ, オ, オ) の
3通りなので
求める確率は $\frac{3}{8}$

計算でも、列挙でも
どちらでも解ける
ように

4-3 から順に演習

4-3

(1) 2個のサイコロを A, B と区別して考えると起こりうるのは
全部で $6^2 = 36$ 通りあり、このうち丁 (和が偶数) になるのは
下図より 18通りなので、
 $P(\text{和が偶数}) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

A \ B	1	2	3	4	5	6
1	偶	奇	偶	奇	偶	奇
2	奇	偶	奇	偶	奇	偶
3	偶	奇	偶	奇	偶	奇
4	奇	偶	奇	偶	奇	偶
5	偶	奇	偶	奇	偶	奇
6	奇	偶	奇	偶	奇	偶

(2) (考え方1)も(考え方2)も
起こりやすさが均等ではないもの
を数えているのが誤り。

例えば(考え方1)では

和が3 $\rightarrow \{(1, 2), (2, 1)\}$ の 2通り

和が4 $\rightarrow \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ の 3通り

のようにこれらは均等ではない

4-3a

3個のサイコロを全て区別すると起こりうるのは全部で
 $6^3 = 216$ 通り あり。このうち和が9と和が10になる
のはそれぞれ

和が9
 $\{1, 2, 6\} : 6通り$
 $\{1, 3, 5\} : 6通り$
 $\{1, 4, 4\} : 3通り$
 $\{2, 2, 5\} : 3通り$
 $\{2, 3, 4\} : 6通り$
 $\{3, 3, 3\} : 1通り$
全部で 25通り

和が10
 $\{1, 3, 6\} : 6通り$
 $\{1, 4, 5\} : 6通り$
 $\{2, 2, 6\} : 3通り$
 $\{2, 3, 5\} : 6通り$
 $\{2, 4, 4\} : 3通り$
 $\{3, 3, 4\} : 3通り$
全部で 27通り

$$P(\text{和が9}) = \frac{25}{216} \quad P(\text{和が10}) = \frac{27}{216}$$

よって和が10に賭けるべき

4-4

$$(1) P(\text{1人目があたり}) = \frac{3}{10}$$

$$(2) P(\text{2人目があたり}) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{3}{10}$$

1人目 2人目 1人目 2人目

このやり方だと、

(3) がメンドウなので
上手く求めよう!

(2) 別解 10本のくじを全て区別する

($O_1, O_2, O_3, X_1, X_2, \dots$ とする)

<考え方> 10箇所に目隠しした状態で、くじを配る
1人目 2人目 3人目 4人目 5人目 6人目 7人目 8人目 9人目 10人目

1人目 O_3 2人目 3人目 4人目 5人目 6人目 7人目 8人目 9人目 10人目

2人目がどのあたりかで3通り (O_1 or O_2 or O_3)

残りの9本はどの並びでもいいので $9!$ 通り

10本のくじの並び方は $10!$ 通りである

このうち2人目が当たるのは、 $3 \times 9!$ 通りなので

(2人目から配ることを考える)

$$P(2人目あたり) = \frac{3 \times 9!}{10!} = \frac{3}{10}$$

(3) 1人目 2人目 3人目 4人目 5人目 6人目 7人目 8人目 9人目 10人目

3通り

残りは $9!$ 通り

$$P(5人目あたり) = \frac{3 \times 9!}{10!} = \frac{3}{10}$$

くじ引きは何人目でも当たる確率は同じで、
「残りものには福がある」
は確率論的にはウソ。

(4) 追加

Q 3人目と8人目が当たる確率は?

1人目 2人目 3人目 4人目 5人目 6人目 7人目 8人目 9人目 10人目

3人目がどのあたりかで3通り

8人目がどのあたりかで2通り

残り8本は何でもOK

$$P(3人目と8人目あたり) = \frac{3 \times 2 \times 8!}{10!} = \frac{1}{15}$$

4-4a

(1) $\frac{4}{11}$ (4-4 と全く同じ)

(2)

1人目 2人目 3人目 4人目 5人目 6人目 7人目 8人目 9人目 10人目

step 2

・ O_1 が1~6人目のうちどこかで6通り

・ O_3 は残りの5通り

・ O_4 は残りの4通り

step 1

7人目がどのあたりかで4通り

step 3

外れは $7!$ 通り

よって

$P(7人目が4本目のあたり)$

$$= \frac{4 \times 6 \times 5 \times 4 \times 7!}{11!}$$

$$= \frac{4 \times 6 \times 5 \times 4}{11 \times 10 \times 9 \times 8}$$

$$= \frac{2}{33}$$

(3) 1人目 2人目 3人目 4人目 5人目 6人目 7人目 8人目 9人目 10人目

step 3

・ O_3 の場所 6通り

・ O_4 5通り

step 1

7人目4通り

step 2

・ 残り3つのあたりのうちどれを使うかで3通り

(O_1 or O_3 or O_4)

・ O を8~11人目のうちどこかで4通り

step 4

外れは $7!$ 通り

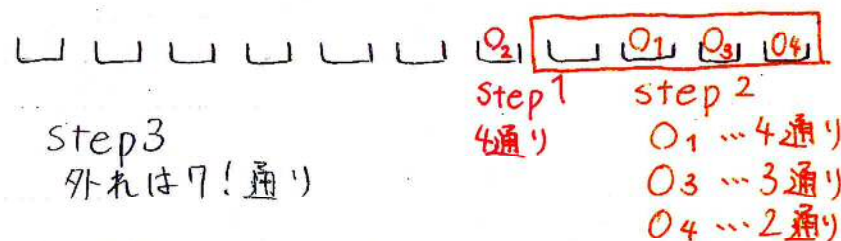
$P(7人目が3本目のあたり)$

$$= \frac{4 \times 3 \times 4 \times 6 \times 5 \times 7!}{11!}$$

$$= \frac{2}{11}$$

※ step 2 の3通りを忘れないで注意

(3) まずは 7人目が 1本目の あたりを引くことを考える



$$P(7人目が1本目のあたり) = \frac{4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 7!}{11!} = \frac{2}{165}$$

次に 7人目が 2本目の あたりを引くことを考える



$$P(7人目が2本目のあたり) = \frac{4 \times 3 \times 6 \times 4 \times 3 \times 7!}{11!} = \frac{6}{55}$$

以上より 3本目の あたりが最も確率が高い。

C4-3 (モンティホール問題)

実際にアメリカの番組であった。モンティホールは司会者

直感的には移動しない人が多かった...

では実験してみよう

実験

- ① 1人が3つのコップのうち1つにボールを隠す もう1人は見ない
- ② もう1人(A)が1つのコップを指す
- ③ 隠した人が空のコップを1つしる
- ④ Aは自分が選ぶコップを変えるか決める

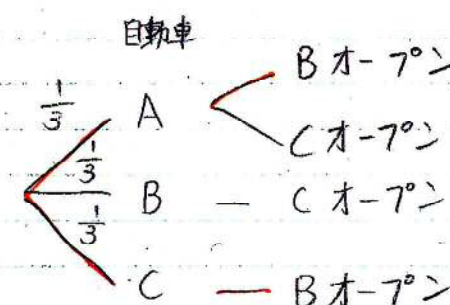
<結果>

Aが最初に指したコップをa、③の後、A以外に残ったコップをbとする

	a	b
ボールが入っていた回数	3回	7回

計算する

自動車が隠れているカーテンをAとし
残りはB、Cとする



$$P(\text{初めに選んだカーテンが当たり} | \text{Bオープン}) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

つまり、BをオープンしてもCをオープンしても移動しなければ、確率は $\frac{1}{3}$ で移動すれば $\frac{2}{3}$ となる。
よって 移動した方が確率は2倍高い

$$P(\text{初めに選んだカーテンが当たり} | \text{Cオープン}) = \frac{1}{3}$$

5日目

§5 確率分布と期待値

例 平均

80点	60点	40点
3人	2人	1人

この表のようなとき

平均点 $\frac{80+60+40}{3} = 60$ 点ではない!

正しくは

$$\frac{80 \times 3 + 60 \times 2 + 40 \times 1}{6} = 80 \times \frac{3}{6} + 60 \times \frac{2}{6} + 40 \times \frac{1}{6} \quad \star$$

$$= \frac{200}{3} \text{ 点}$$

である。

例経

ランダムに値が決まる変数 X (確率変数という) の
平均値を期待値といい、 $E(X)$ と書く
↳ Expectation

$E(X)$ の計算式は $\star$ の形を見ればよく分かる。

$E(X)$ の定義式

$E(X) = [(X \text{ の値}) \times (\text{そうなる確率})]$ の和

$\star$ では... 80, 60, 40 $\frac{3}{6}, \frac{2}{6}, \frac{1}{6}$

5-1

(1) Xの値	600	250	20	0	計
そうなる確率	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	1

上、下の値をかけて
足す!!

確率の和が1にならなければ、計算ミスしている

$$(2) E(X) = 600 \times \frac{1}{10} + 250 \times \frac{2}{10} + 20 \times \frac{3}{10} + 0 \times \frac{4}{10}$$

$$= \frac{600}{10} + \frac{500}{10} + \frac{60}{10} + 0$$

$$= 116$$

通分することが多いので、分母はそのままの方が楽!!

(2) の $E(X) = 116$ という結果から

「1回につき平均で 116 円もらえるから、100回買うと 11600 円もらえる。」

とか

「1回の参加料が 116 円未満なら参加しても良い」
などが読み取れる!

(3) やめるべき (期待値 (116 円) < 参加料 (120 円))

5-1 a

(1) Xの値	200	80	計
そうなる確率	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	1

$$(2) E(X) = 200 \times \frac{3}{6} + 80 \times \frac{4}{6}$$

$$= \frac{400 + 320}{6} = 120$$

5-2

ゲームを続けていた場合に

① Aが勝つ確率は

(ウが3回出る前にオが出る)

オ $\leftarrow \frac{1}{2}$
ウオ $\leftarrow \frac{1}{4}$
ウウオ $\leftarrow \frac{1}{8}$ } 全部で $\frac{3}{8}$

② Bが勝つ確率は

(オが1回出る前にウが3回出る)

ウウウ $\leftarrow \frac{1}{8}$

よってAが受け取る金額を X とすると
1000 円
払う

Xの値	1000	-1000	計
そうなる確率	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	1

$$E(X) = 1000 \times \frac{3}{8} + (-1000) \times \frac{5}{8}$$

$$= 750$$

となるから Bが750円払うなら

許してもよい

5-2 a

あと2回オが出たらAの勝ちである。

Aの勝ち {
オオ $\leftarrow \frac{1}{4}$
ウオオ $\leftarrow \frac{1}{8}$
オウオ $\leftarrow \frac{1}{8}$
ウウオオ $\leftarrow \frac{1}{16}$
ウオウオ $\leftarrow \frac{1}{16}$
オウウオ $\leftarrow \frac{1}{16}$
ウウウオ $\leftarrow \frac{1}{16}$ } 全部で $\frac{11}{16}$

Bの勝ち {
ウウウ $\leftarrow \frac{1}{8}$
オウウウ $\leftarrow \frac{1}{16}$
ウオウウ $\leftarrow \frac{1}{16}$
ウウウオ $\leftarrow \frac{1}{16}$ } $\frac{5}{16}$

よってAが受け取る金額を Y 円とすると

Yの値	1000	-1000	計
そうなる確率	$\frac{11}{16}$	$\frac{5}{16}$	1

$$E(Y) = 1000 \times \frac{11}{16} + (-1000) \times \frac{5}{16}$$

$$= 375$$

となるから Bが375円払うなら
許してもよい

C5-1

(1) (i)	X の値	0	1	2	3	計
	その確率	$(\frac{1}{3})^3$	$3C_1 \frac{2}{3} (\frac{1}{3})^2$	$3C_2 (\frac{2}{3})^2 \times \frac{1}{3}$	$(\frac{2}{3})^3$	1
		$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{8}{27}$	

$$(ii) E(X) = \frac{0+6+24+24}{27} = \boxed{2} \quad \left(\frac{2}{3} \times 3 \text{ より当たり前} \right)$$

表が出る確率

(2) (i) $E(X) = \boxed{4}$ となりそう (1) より)

(ii)	X の値	0	1	2	3	4	5	6
	その確率	$(\frac{1}{3})^6$	$6C_1 \frac{2}{3} (\frac{1}{3})^5$	$6C_2 (\frac{2}{3})^2 (\frac{1}{3})^4$	$6C_3 (\frac{2}{3})^3 (\frac{1}{3})^3$	$6C_4 (\frac{2}{3})^4 (\frac{1}{3})^2$	$6C_5 (\frac{2}{3})^5 (\frac{1}{3})$	$(\frac{2}{3})^6$

$$E(X) = \frac{0+12+120+480+960+960+384}{729} = \frac{2916}{729} = \boxed{4}$$

直感でわかるものもある...

C5-3

(1) サイコロを1回投げたときに出る目をXとすると

X の値	1	2	3	4	5	6	計
その確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

なので

$$E(X) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$

よって $\begin{cases} 1, 2, 3 \text{ であれば 2 回目をふり} \\ 4, 5, 6 \text{ であれば 2 回目をふらない} \end{cases}$

(2) (1) で決めたルールでの
2 回目終了時の得点は

右図のようになっている。(1) より 1 回目か
4, 5, 6 なら、
2 回目は降り
ないので、1 回
目のまま

	1	2	3	4	5	6
1 回目	1	2	3	4	5	6
2 回目	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	1	2	3	4	5	6
3	1	2	3	4	5	6
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6

その期待値は

X の値	1	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{9}{36}$	1

より

$$E(X) = 3+6+9+36+45+54$$

$$= \frac{153}{36}$$

$$= \frac{17}{4} = 4.25$$

よって

1 回目か 1, 2, 3 であれば、

2 回目をふり、2 回目か

1, 2, 3, 4 であれば 3 回目をふり

プリント (35 期待値)

$$P(1 \text{ 回目にオ}) = \frac{1}{2}$$

$$P(2 \text{ 回目に初めてオ}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P(3 \text{ 回目に初めてオ}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$P(k \text{ 回目に初めてオ}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$$

もらえる金額	2	4	8	16	...	2^k	...
確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...	$\frac{1}{2^k}$	...

なので

$$E(\text{もらえる金額}) = 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} + 8 \times \frac{1}{8} + 16 \times \frac{1}{16} + \dots$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

$$= \infty \text{ (もらえるお金は無限大)}$$

よってゲームに参加すると ∞ 円もらえる。(けど普通は参加しない)

信じていいデータと信じてはいけないデータがある

C5-4

(1) 投げる回数	1	2	3	4	5	...
確率	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	...

より

$$E = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{16} + 5 \times \frac{1}{32} + \dots$$

$$\text{なので } \textcircled{2} E = 1 \times 1 + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} + 5 \times \frac{1}{16} + \dots$$

$$\text{初日に } \boxed{C1-3} \text{ -) } E = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{16} + \dots$$

$$\text{でやったものと } E = 1 \times 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

大体同じ。となり、もう1度計算する

すると

$$\begin{aligned} 2E &= 2 + \cancel{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots} \\ \Rightarrow E &= \cancel{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots} \\ E &= 2 \end{aligned}$$

根気強く計算してい

別解の前に

[C1-3]

(i) (ii) について

実は $8 = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{2}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 8$

でも解けると紹介したので、この意味を考えてみよう!

$$8 = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{2}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 8$$

Aが勝つ
確率

1が出たら
確率1で
Aが勝つ

2・3が出たら
確率0
(Aの負け)

4が出たら
振り直しなので
Aの勝率は8

ポイントは
サイコロを
1回ふっている

これにより $8 = \frac{1}{3}$ と求まる。

これと同じように [C5-4] (i) に挑戦 (1回コインを投げる)

$$E = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times (1 + E)$$

表が出るまでに投げる回数

表が出たら1回で終わり

裏が出たら表が出るまで1+E回

すでに投じた裏1回

より

$$E = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} E$$

なので $E = 2$ と求まる。

とりあえず「1回やってみる!」
が大切!!

[C1-4]

nマス手前からスタートしてゴールする確率を $P(n)$ とすると

$$P(1) = \frac{1}{6}$$

$$P(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

$$P(2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{36}$$

2が1回、1・1が出る

$$\frac{1}{6} P(1) \quad \frac{1}{6} P(2)$$

$$P(4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

3・1, 2・2, 2・1・1, 1・3, 1・2・1, 1・1・2, 1・1・1・1

$\frac{1}{6} \times P(1)$, $\frac{1}{6} \times P(2)$, $\frac{1}{6} \times P(3)$

以下同じカラクリで

$$P(5) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} P(1) + \frac{1}{6} P(2) + \frac{1}{6} P(3) + \frac{1}{6} P(4)$$

$$P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} P(1) + \frac{1}{6} P(2) + \frac{1}{6} P(3) + \frac{1}{6} P(5)$$

$$P(7) = \frac{1}{6} P(1) + \frac{1}{6} P(2) + \frac{1}{6} P(3) + \frac{1}{6} P(4) + \frac{1}{6} P(5) + \frac{1}{6} P(6)$$

$$P(1000) = \frac{1}{6} P(994) + \frac{1}{6} P(995) + \frac{1}{6} P(996) + \frac{1}{6} P(997) + \frac{1}{6} P(998) + \frac{1}{6} P(999)$$

$$\frac{1}{6} > \frac{1}{6} P(6) \text{ なので } P(6) > P(7)$$

→ P(6) から後は減っていくのでは?

以上より 1番クリアしやすいのは (か) 6マス手前

[C2-4]

P(1000) ってだいたいどれくらい?

まともにやるとつらい... → 余事象を考える。(52より)

「ゴールしない」という余事象を考える。

$$1 - P(1000) = P(999) \times \frac{5}{6} + P(998) \times \frac{4}{6} + P(997) \times \frac{3}{6} + P(996) \times \frac{2}{6} + P(995) \times \frac{1}{6}$$

$$P(1000) = P(999) \cdot P(998) \cdot P(997) \cdot P(996) \cdot P(995) \cdot P(994)$$

だろう...

$$1 - x = \frac{5}{6}x + \frac{4}{6}x + \frac{3}{6}x + \frac{2}{6}x + \frac{1}{6}x$$

$$= \frac{15}{6}x$$

$$\frac{21}{6}x = 1$$

$$x = \frac{4}{7} = \frac{2}{3.5}$$

サイコロの目の平均と同じ

例えば
オ → 1マス進むとする → 平均して2マス進む
ウ → 3マス

あるマスを通る確率は $\frac{1}{2}$

同様に 平均して3.5マスずつ進むので

あるマスを通る確率は $\frac{2}{7}$

実際の値に非常に近い