

ー 中 3C 宿題プリント (夏期前期-4) 解答 ー

1.

次の3直線が1点で交わるよう、定数 a を定めよ。

$$\begin{cases} \ell: 3x + 5y + 7 = 0 \\ m: x + 4y + a = 0 \\ n: 13x + 45y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ell: 3x + 5y + 7 = 0 \cdots \textcircled{1} \\ m: x + 4y + a = 0 \cdots \textcircled{2} \\ n: 13x + 45y - 5 = 0 \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

ℓ と m の交点の座標 (x, y) は、連立方程式 $\begin{cases} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{cases}$ の解であ

るから、 $\textcircled{1} + \textcircled{2} \times 10$ で得られる式

$$3x + 5y + 7 + (x + 4y + a) \times 10 = 0$$

$$13x + 45y + 7 + 10a = 0 \cdots \textcircled{4}$$

も満たす。

$\textcircled{3}$ と $\textcircled{4}$ が一致するのは、

$$-5 = 7 + 10a$$

$$-12 = 10a$$

$$a = -\frac{12}{10} = -\frac{6}{5} \text{ のとき。}$$

このとき、直線 n が、 ℓ と m の交点を通り、3直線 ℓ, m, n が1点で交わる。

以上より、求める a の値は $a = -\frac{6}{5}$

2.

円 $C: x^2 + y^2 = 9$ と直線 $\ell: 3x - y + 1 = 0$ は2点 P, Q で交わっている。
P, Q, O(0, 0) の3点を通る円の式を求めよ。

C と ℓ の交点の座標 (x, y) は、連立方程式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = 0 \cdots \textcircled{1} \\ 3x - y + 1 = 0 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

の解である。

したがって、 $\textcircled{1} + k \times \textcircled{2}$ で得られる

$$x^2 + y^2 - 9 + k(3x - y + 1) = 0 \cdots \textcircled{3}$$

も満たしている。すなわち、 $\textcircled{3}$ の表す図形に、 C と ℓ の2交点 P, Q の両方がのっている。

$\textcircled{3}$ の表す図形が原点 O(0, 0) を通るのは、 $\textcircled{3}$ に $x = 0, y = 0$ を代入して成り立つとき、すなわち、
 $-9 + k = 0 \quad \therefore k = 9$ のとき。

これを $\textcircled{3}$ に代入すると、

$$x^2 + y^2 - 9 + 9(3x - y + 1) = 0$$

$$x^2 + y^2 + 27x - 9y = 0 \cdots \textcircled{4}$$

となり、これが3点 P, Q, O(0, 0) を通る円の式である。

補足

$\textcircled{4}$ を平方完成すると、

$$\left(x + \frac{27}{2}\right)^2 - \left(\frac{27}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left(x + \frac{27}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{9}{2}\right)^2 = \underbrace{\left(\frac{27}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2}_{\text{正}}$$

となり、確かに $\textcircled{4}$ は円を表している。