

ー 中 3C 宿題プリント (夏期後期-2) 解答 ー

1. $A = 2^3 \times 5^2 \times 7^5$, $B = 2 \times 3^3 \times 5^5 \times 7$ について以下の問に答えよ。

- (1) A と B の最大公約数 G を求めよ。(素因数分解形で答えよ。)
- (2) A と B の最小公倍数 L を求めよ。(素因数分解形で答えよ。)
- (3) $A \times C$ が平方数となるような最小の正の整数 C を求めよ。

- (1) A と B の公約数を素因数分解したときの素因数 p の指数は、

(A を素因数分解したときの p の指数) 以下
かつ (B を素因数分解したときの p の指数) 以下
でなければならない。

最大公約数の場合、それぞれの素因数について、上記を満たす最大の指数を選んでいくことになる。

2 の指数 : 3 と 1 のうちの小さい方を選んで、1
3 の指数 : 0 と 3 のうちの小さい方を選んで、0
5 の指数 : 2 と 5 のうちの小さい方を選んで、2
7 の指数 : 5 と 1 のうちの小さい方を選んで、1
よって、 $G = 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = \boxed{2 \cdot 5^2 \cdot 7}$

- (2) A と B の正の公倍数を素因数分解したときの素因数 p の指数は、

(A を素因数分解したときの p の指数) 以上
かつ (B を素因数分解したときの p の指数) 以上
でなければならない。

最小公倍数の場合、それぞれの素因数について、上記を満たす最小の指数を選んでいくことになる。

2 の指数 : 3 と 1 のうちの大きい方を選んで、3
3 の指数 : 0 と 3 のうちの大きい方を選んで、3
5 の指数 : 2 と 5 のうちの大きい方を選んで、5
7 の指数 : 5 と 1 のうちの大きい方を選んで、5
よって、 $L = \boxed{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^5}$

- (3) 正の整数 N が平方数となるのは、 N を素因数分解したときのそれぞれの指数がすべて偶数のとき。(0 も偶数であることに注意。)

$A = 2^3 \times 5^2 \times 7^5$ に正の整数をかけてできる一番小さい平方数は、 $2^4 \times 5^2 \times 7^6$ である。

したがって、 $C = 2 \times 7 = \boxed{14}$

2.

- (1) 1023 と 1025 の最大公約数を互除法を用いて求めよ。
- (2) 1755 と 1911 の最大公約数を互除法を用いて求めよ。

整数 x, y の最大公約数を $\text{GCD}(x, y)$ で表すことにする。

- (1) $\text{GCD}(1023, 1025)$
 $= \text{GCD}(1023, 2)$ ($1025 = 1023 \cdot 1 + 2$ より)
 $= \text{GCD}(1, 2)$ ($1023 = 2 \cdot 511 + 1$ より)
 $= \boxed{1}$

補足

(2 は 1023 の約数ではないので、 $\text{GCD}(1023, 2) = 1$ とわかる。)

- (2) $\text{GCD}(1755, 1911)$
 $= \text{GCD}(1755, 156)$ ($1911 = 1755 \cdot 1 + 156$ より)
 $= \text{GCD}(39, 156)$ ($1755 = 156 \times 11 + 39$ より)
 $= \boxed{39}$ ($156 = 39 \times 4$ より)