

ー 中 3C 宿題プリント (夏期後期-4) 解答 ー

1.

(1) $5^{\square} \equiv 1 \pmod{16}$ に当てはまる自然数を 1 つ求めよ。

(2) 5^{123} を 16 で割った余りを求めよ。

(1) 合同式は $\pmod{16}$ とする。

$$5^2 = 25 \equiv 9$$

$$5^3 = 5^2 \cdot 5 \equiv 9 \cdot 5 \equiv 45 \equiv 13$$

$$5^4 = 5^3 \cdot 5 \equiv 13 \cdot 5 \equiv 65 \equiv 1$$

したがって、 $5^{\square} \equiv 1 \pmod{16}$ に当てはまる自然数の 1 つは $\boxed{4}$

(2) $5^4 \equiv 1$ の両辺を 30 乗すると、

$$(5^4)^{30} \equiv 1^{30}$$

$$5^{120} \equiv 1$$

両辺に 5^3 をかけて

$$5^{120} \cdot 5^3 \equiv 1 \cdot 5^3$$

$$5^{123} \equiv 13$$

したがって、 5^{123} を 16 で割った余りは、 $\boxed{13}$

2.

7^{100} を 20 で割った余りを求めよ。

$20 = 4 \cdot 5$ であり、4 と 5 は最大公約数が 1 なので、 7^{100} を 4 で割った余り、5 で割った余りがわかれば 20 で割った余りも求められる。

$$7^2 = 49 \equiv 1 \pmod{4}$$

両辺を 50 乗して

$$(7^2)^{50} \equiv 1^{50} \pmod{4}$$

$$7^{100} \equiv 1 \pmod{4} \cdots \textcircled{1}$$

よって、 7^{100} を 4 で割った余りは 1 である。

$$7^2 = 49 \equiv -1 \pmod{5}$$

両辺を 50 乗して

$$(7^2)^{50} \equiv (-1)^{50} \pmod{5}$$

$$7^{100} \equiv 1 \pmod{5} \cdots \textcircled{2}$$

よって、 7^{100} を 5 で割った余りは 1 である。

② より、 $7^{100} = 5k + 1$ (k は正の整数) とおけて、① より、 $5k + 1 \equiv 1 \pmod{4}$

$$k + 1 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$k \equiv 0 \pmod{4}$$

したがって、 $k = 4m$ (m は正の整数) とおけ、

$$7^{100} = 5(4m) + 1 = 20m + 1$$

したがって、 7^{100} を 20 で割った余りは $\boxed{1}$

別解

「20 で割った余りを直接調べる」という方針でも、求めることができる。

合同式は $\pmod{20}$ とする。

$$7^2 = 49 \equiv 9$$

$$7^3 = 7^2 \cdot 7 \equiv 9 \cdot 7 \equiv 63 \equiv 3$$

$$7^4 = 7^3 \cdot 7 \equiv 3 \cdot 7 \equiv 21 \equiv 1$$

$7^4 \equiv 1$ の両辺を 25 乗して、

$$(7^4)^{25} \equiv 1^{25}$$

$$7^{100} \equiv 1$$

したがって、 7^{100} を 20 で割った余りは $\boxed{1}$