中3数学D　復習テスト解答　夏期後期−2

復習 2-1

整数 a,b の最大公約数を $\mathrm{GCD}(a,b)$ と書く.

(1)
$$\begin{aligned}&\mathrm{GCD}(992,961)\\&=\mathrm{GCD}(992-961,961)\\&=\mathrm{GCD}(31,961)\\&=\mathrm{GCD}(31,31\times31)\\&=\boxed{31}\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&\mathrm{GCD}(3233,2257)\\&=\mathrm{GCD}(3233-2257,2257)\\&=\mathrm{GCD}(976,2257)\\&=\mathrm{GCD}(976,2257-976\times2)\\&=\mathrm{GCD}(976,305)\\&=\mathrm{GCD}(976-305\times3,305)\\&=\mathrm{GCD}(61,305)\\&=\mathrm{GCD}(61,61\times5)\\&=\boxed{61}\end{aligned}$$

復習 2-2

(1) 23 と 13 に互除法を行うと,

$23=13\times1+10$ ………………… ①

$13=10\times1+3$ ………………… ②

$10=3\times3+1$ ………………… ③

$3=1\times3$

となる.

互除法で得られる余りが, 順番に 23 と 13 を用いて表せるので, 最後の余り 1 も 23 と 13 を用いて表せて,

$23x-13y=1$ ………………… ④

を満たす整数 x,y の組が得られる.

この原理に基づいて計算すると, ①より

$10=23-13$ ………………… ⑤

なので, ⑤を②に代入して

$13=(23-13)\times1+3$

$\therefore 3=-23+13\times2$ ………………… ⑥

⑤, ⑥を③に代入して

$23-13=(-23+13\times2)\times3+1$

$\therefore 1=23\times4-13\times7$ ………………… ⑦

よって, ④を満たす整数 x,y の組として

$\boxed{x=4,y=7}$

が見つかる.

(2) ④を満たす整数 x,y に対して, ④から⑦の $23\times4-13\times7=1$ を引いた

$23\times(x-4)-13\times(y-7)=0$

$\therefore 23\times(x-4)=13\times(y-7)$ ………………… ⑧

が成り立つ.

⑧より, $23\times(x-4)$ は素数 13 の倍数であり, 23 は 13 の倍数ではないので, $x-4$ は 13 の倍数. したがって,

$x-4=13k$

$\therefore x=13k+4$, k は整数………………… ⑨

と表せる.

⑨を⑧に代入すると

$23\times13k=13\times(y-7)$

$y-7=23k$

$\therefore y=23k+7$

であり, この y は任意の整数 k に対して整数である.

したがって, ④を満たす整数 x,y の組は

$$\begin{cases}x=13k+4\\y=23k+7\end{cases},\quad k\text{ は整数}$$

と表せるものすべてである.

このとき, $x+y$ は

$$\begin{aligned}&13k+4+23k+7\\&=36k+11,\quad k\text{ は整数}\end{aligned}$$

の形に表せる整数をすべて動くので, このうち最も 2018 に近いものは, $k=56$ のときの

$36\times56+11=2027$

であり, このとき

$$\begin{cases}x=13\times56+4=732\\y=23\times56+7=1295\end{cases}$$

よって, 求める x,y の組は

$\boxed{x=732,y=1295}$

である.