

中3数学D 復習テスト解答 夏期後期-4

復習 4-1

- (1) 任意の整数は mod 6 で 0, 1, 2, 3, 4, 5 のいずれか 1 つと合同であり,

x	0	1	2	3	4	5
$2x$	0	2	4	0	2	4

となるので, $2x \equiv 4 \pmod{6}$ となる x は

$$x \equiv 2, 5 \pmod{6}$$

である.

- 答は $x \equiv 2 \pmod{3}$ とも表せる.

- (2) $x \equiv 2 \pmod{12}$ となるのは

$x-2$ が 12 の倍数

のとき, すなわち

$$x-2=12k \quad \therefore x=12k+2 \quad (k \text{ は整数})$$

と表せるときである.

これが $x \equiv 4 \pmod{7}$ も満たすのは, k が

$$12k+2 \equiv 4 \quad \therefore 5k \equiv 2 \pmod{7} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を満たすときである.

任意の整数は mod 7 で 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 のいずれか 1 つと合同であり,

k	0	1	2	3	4	5	6
$5k$	0	5	3	1	6	4	2

となるので, $\textcircled{1}$ となるのは

$$k \equiv 6 \pmod{7}$$

$\therefore k-6$ が 7 の倍数

のとき, すなわち

$$k-6=7l \quad \therefore k=7l+6 \quad (l \text{ は整数})$$

と表せるときである.

よって, 条件を満たす x は

$$x=12(7l+6)+2$$

$$\therefore x=84l+74 \quad (l \text{ は整数})$$

と表せるものすべてである.

- 答は $x \equiv 74 \pmod{84}$ とも表せる.

復習 4-2

- (1) 任意の整数 n に対して,

$$n^4+11n^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

を示せばよい. 以下, mod 3 で考える.

n は 0, 1, 2 のいずれかと合同であり,

$$n \equiv 0 \text{ のとき, } n^4+11n^2 \equiv 0+2 \cdot 0 \equiv 0$$

$n \equiv 1$ のとき,

$$n^4+11n^2 \equiv 1+2 \cdot 1 \equiv 3 \equiv 0$$

$n \equiv 2$ のとき

$$n^4+11n^2 \equiv 16+2 \cdot 4 \equiv 1+2 \equiv 3 \equiv 0$$

であるから, いずれの場合においても

$$n^4+11n^2 \equiv 0$$

が成り立つ. よって, n^4+11n^2 は 3 の倍数である.

- (2) いくつかの n で計算してみると

n^4+11n^2 は 12 の倍数…………… ☆

と予想できる. ☆を示すことができれば,

$n=1$ のとき $1^4+11 \cdot 1^2=12$ であること

から, 空欄に当てはまる最大の自然数は

12 であると言える.

(1)より, n^4+11n^2 が 3 の倍数であるから, 4 の倍数であることを示す.

以下, mod 4 で考える.

n は 0, 1, 2, 3 のいずれかと合同であり,

n	0	1	2	3
n^2	0	1	0	1

であるから,

$$n \equiv 0, 2 \text{ のときは, } n^2 \equiv 0 \text{ なので,}$$

$$n^4+11n^2 \equiv 0+3 \cdot 0 \equiv 0$$

$$n \equiv 1, 3 \text{ のときは, } n^2 \equiv 1 \text{ なので,}$$

$$n^4+11n^2 \equiv 1+3 \cdot 1 \equiv 4 \equiv 0$$

となり, いずれの場合においても

$$n^4+11n^2 \equiv 0$$

が成り立ち, n^4+11n^2 は 4 の倍数である.

したがって, n^4+11n^2 は任意の整数 n に対して 12 の倍数であることが言えたので,

空欄に当てはまるのは $\boxed{12}$ である.