# 中3数学D 整数 宿題解答 §1 素因数分解

**宿題** 1-1

$79\times 107\times 8633=89\times 97\times 8453$

(1) 8453 が素数であるとすると，左辺の

$79\times 107\times 8633$

は 8453 の倍数であるから，79, 107, 8633 のうち，少なくとも一つは 8453 の倍数であることになるが，いま，79, 107, 8633 はどれも 8453 の倍数ではない.

背理法により，8453 は素数で $\boxed{\text{ない}}$.

(2) 左辺の $79\times 107\times 8633$ は素数 89 の倍数なので，79, 107, 8633 のうち，少なくとも 1 つは 89 の倍数．79, 107 は 89 の倍数ではないので，8633 は 89 の倍数.

割り算してみると，

$8633=89\times 97$

であり, 97 も素数であるから，$\boxed{89\times 97}$ が求める素因数分解である.

**宿題** 1-2

(1) $1728=\boxed{2^6\times 3^3}$

(2) 1728 の正の約数は,

$$\begin{matrix} 2^0\times 3^0 & 2^0\times 3^1 & 2^0\times 3^2 & 2^0\times 3^3 \\ 2^1\times 3^0 & 2^1\times 3^1 & 2^1\times 3^2 & 2^1\times 3^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2^6\times 3^0 & 2^6\times 3^1 & 2^6\times 3^2 & 2^6\times 3^3 \end{matrix}$$

の $7\times 4=\boxed{28}$ 個.

(3) (2)の約数すべての和 $S$ を求めたい.

(2)で列挙されている約数のうち，$k+1$ 段目を横 1 列に足すと

$$\begin{aligned} &2^k\times 3^0+2^k\times 3^1+2^k\times 3^2+2^k\times 3^3 \\ &=2^k\times(3^0+3^1+3^2+3^3) \end{aligned}$$

なので，これをすべての列について足すと,

$$\begin{aligned} &\quad 2^0\times(3^0+3^1+3^2+3^3) \\ &+2^1\times(3^0+3^1+3^2+3^3) \\ &+\cdots \\ &+2^6\times(3^0+3^1+3^2+3^3) \\ &=(2^0+2^1+\cdots+2^6)\times(3^0+3^1+3^2+3^3) \\ &=127\times 40=\boxed{5080} \end{aligned}$$

となる.

- $N=p^a\times q^b\times\cdots\times r^c$（$p,q,\cdots,r$ は異なる素数）と素因数分解されるとき，$N$ の正の約数は,

$$p^k\times q^l\times\cdots\times r^m,\quad \begin{cases} k=0,1,2,\cdots,a \\ l=0,1,2,\cdots,b \\ \vdots \\ m=0,1,2,\cdots,c \end{cases}$$

と表されるものたちである.

これらは全部で $(a+1)(b+1)\cdots(c+1)$ 個あり，その総和は

$$(1+p+p^2+\cdots+p^a)(1+q+q^2+\cdots+q^b)\times\cdots\times(1+r+r^2+\cdots+r^c)$$

である.

**宿題** 1-3

12 を 2 以上の自然数の，1 個以上の積として表す方法は

$12 = 6\times2 = 4\times3 = 3\times2\times2$

の 4 通りあるので，自然数$N$の正の約数の個数が 12 個となるのは，$N$が次のいずれかの形に素因数分解されるときである．

i) $N = p^{11}$，$p$は素数

ii) $N = p^5\times q$，$p,q$は異なる素数

iii) $N = p^3\times q^2$，$p,q$は異なる素数

iv) $N = p^2\times q\times r$，$p,q,r$は異なる素数

それぞれの場合の，最小の$N$を求めると，次のようになる．

i) $N = 2^{11} = 2048$が最小．

ii) $p > q$のときは，

$p^5\times q = p^4\times(p\times q)$

よりも

$q^5\times p = q^4\times(p\times q)$

の方が小さいので，最小の$N$を与える$p,q$は$p < q$となるものから探せばよい．これを満たす素数$p,q$のうち，$p,q$がどちらも最小になるのは

$p = 2, q = 3$

であるから，このときの

$N = 2^5\times3 = 96$

が$N$の最小値である．

iii) ii)と全く同様にして，$N = 2^3\times3^2 = 72$が最小である．

iv) $p > q$のときは，

$p^2\times q\times r = p\times(p\times q\times r)$

よりも

$q^2\times p\times r = q\times(p\times q\times r)$

の方が小さいので，最小の$N$を与える$p,q,r$は$p < q$となるものから探せばよい．同様に$p < r$となるものから探せばよいことも言えるので，必要なら$q,r$を入れ替えて，$p < q < r$となるものの中から探せばよいことが分かる．これを満たす素数$p,q,r$のうち，$p,q,r$がどれも最小になるのは

$p = 2, q = 3, r = 5$

であるから，このときの

$N = 2^2\times3\times5 = 60$

が最小．

したがって，求める最小の自然数は$\boxed{60}$である．