中3数学D 整数 宿題解答 §2 互除法

宿題 2-1

整数 a, b の最大公約数を $\mathrm{GCD}(a,b)$ と書く.

(1)
$$\begin{aligned}
&\mathrm{GCD}(1073,2257)\\
&=\mathrm{GCD}(1073,2257-1073\times 2)\\
&=\mathrm{GCD}(1073,111)\\
&=\mathrm{GCD}(1073-111\times 9,111)\\
&=\mathrm{GCD}(74,111)\\
&=\mathrm{GCD}(74,111-74)\\
&=\mathrm{GCD}(74,37)\\
&=\boxed{37}
\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}
&\mathrm{GCD}(122713,130013)\\
&=\mathrm{GCD}(122713,130013-122713)\\
&=\mathrm{GCD}(122713,7300)\\
&=\mathrm{GCD}(122713,73\times 100)
\end{aligned}$$

ここで, 122713 は 2 でも 5 でも割れないので, $100=2^2\times 5^2$ とは互いに素（最大公約数が 1）であるから,

$$\begin{aligned}
&=\mathrm{GCD}(122713,73)\\
&=\mathrm{GCD}(73\times 1681,73)\\
&=\boxed{73}
\end{aligned}$$

宿題 2-2

整数 a, b の最大公約数を $\mathrm{GCD}(a,b)$ と書く.

$$\mathrm{GCD}(n,n+6)=\mathrm{GCD}(n,6)$$

であるから，最大公約数としてありうるものは，6 の（正の）約数の

6, 3, 2, 1

に絞られる.

いま，$n=6,3,2,1$ とすると，それぞれ

$$\mathrm{GCD}(n,6)=6,3,2,1$$

となるので，これらはすべて最大公約数としてありうる数である.

よって，$\boxed{6,3,2,1}$.

宿題 2-3

(1) 83 と 73 に互除法を行うと,

$$83=73\times 1+10 \cdots\cdots ①$$
$$73=10\times 7+3 \cdots\cdots ②$$
$$10=3\times 3+1 \cdots\cdots ③$$
$$3=1\times 3$$

となる.

(2) 互除法で得られる余りが，順番に 83 と 73 を用いて表せるので, 最後の余り 1 も 83 と 73 を用いて表せて,

$$83x+73y=1 \cdots\cdots ④$$

を満たす整数 x, y が得られる.

この原理に基づいて計算すると，①より

$$10=83-73 \cdots\cdots ⑤$$

なので，⑤を②に代入して

$$73=(83-73)\times 7+3$$
$$\therefore 3=-83\times 7+73\times 8 \cdots\cdots ⑥$$

⑤，⑥を③に代入して

$$83-73=(-83\times 7+73\times 8)\times 3+1$$
$$\therefore 1=83\times 22-73\times 25$$

よって，④を満たす整数 x, y として

$$\boxed{x=22,\ y=-25}$$

が見つかる.

(3) $83\times 22+73\times(-25)=1$ の両辺を 6 倍して,

$$83\times 132+73\times(-150)=6$$

であるから， $83x+73y=6$ を満たす整数 x, y として

$$\boxed{x=132,\ y=-150}$$

が見つかる.