中3数学D 整数 宿題解答 §4 合同式(2)

宿題 4-1

(1) 任意の整数は mod 5 で 0, 1, 2, 3, 4 のいずれか 1 つと合同であり，

x	0	1	2	3	4
$3x$	0	3	1	4	2

となるので，$3x \equiv 1 \pmod 5$ となる x は

$\boxed{x \equiv 2 \pmod 5}$

である．

(2) 任意の整数は mod 9 で 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 のいずれか 1 つと合同であり，

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$3x$	0	3	6	0	3	6	0	3	6

となるので，$3x \equiv 6 \pmod 9$ となる x は

$\boxed{x \equiv 2, 5, 8 \pmod 9}$

である．

➢ $3x \equiv 6 \pmod 9$ は

$3x-6=3(x-2)$ が 9 の倍数

を意味するが，これが成り立つのは

$x-2$ が 3 の倍数

のとき，すなわち $\boxed{x \equiv 2 \pmod 3}$ のときである，と考えることもできる．

(3) 任意の整数は mod 12 で 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 のいずれか 1 つと合同であり，

x	0	1	2	3	4	5
$2x$	0	2	4	6	8	10

x	6	7	8	9	10	11
$2x$	0	2	4	6	8	10

となるので，$2x \equiv 7 \pmod{12}$ となる x は

$\boxed{\text{存在しない}}$．

宿題 4-2

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 5 \\ x \equiv 5 \pmod 7 \end{cases}$$

を満たす整数 x をすべて求めたい．

$x \equiv 5 \pmod 7$ となるのは

$x-5$ が 7 の倍数

のとき，すなわち

$x-5=7k \quad \therefore x=7k+5$ （k は整数）

と表せるときである．

これが $x \equiv 2 \pmod 5$ も満たすのは，k が

$7k+5 \equiv 2 \pmod 5 \quad \therefore 2k \equiv 2 \pmod 5$

を満たすときである．

任意の整数は mod 5 で 0, 1, 2, 3, 4 のいずれか 1 つと合同であり，

k	0	1	2	3	4
$2k$	0	2	4	1	3

となるので，$2k \equiv 2 \pmod 5$ となるのは

$k \equiv 1 \pmod 5$

$\therefore k-1$ が 5 の倍数

のとき，すなわち

$k-1=5l \quad \therefore k=5l+1$ （l は整数）

と表せるときである．

よって，条件を満たす x は

$x=7(5l+1)+5$

$\therefore \boxed{x=35l+12 \text{（} l \text{ は整数）}}$

と表せるものたちである．

➢ 答は $\boxed{x \equiv 12 \pmod{35}}$ とも表せる．

宿題 4-3

$N=2^{1001}+3^{1001}+5^{1001}+7^{1001}$

(1) $$\begin{aligned} N &\equiv 2^{1001}+(-2)^{1001}+0^{1001}+2^{1001} \\ &\equiv 2^{1001}-2^{1001}+2^{1001} \\ &\equiv 2^{1001} \pmod 5 \end{aligned}$$

であるから，

$2^2\equiv 4\equiv -1 \pmod 5$

に注目して，

$$\begin{aligned} N &\equiv 2^{1001}\equiv (2^2)^{500}\times 2\equiv (-1)^{500}\times 2 \\ &\equiv 2 \pmod 5 \end{aligned}$$

よって，N を 5 で割った余りは $\boxed{2}$ である．

(2) $$\begin{aligned} N &\equiv 2^{1001}+3^{1001}+(-2)^{1001}+0^{1001} \\ &\equiv 2^{1001}+3^{1001}-2^{1001} \\ &\equiv 3^{1001} \pmod 7 \end{aligned}$$

であるから，

$3^3\equiv 27\equiv -1 \pmod 7$

に注目して，

$$\begin{aligned} N &\equiv 3^{1001}\equiv (3^3)^{333}\times 3^2\equiv (-1)^{333}\times 9 \\ &\equiv -9\equiv 5 \pmod 7 \end{aligned}$$

よって，N を 7 で割った余りは $\boxed{5}$ である．

(3) (1), (2)より，N は

$$\begin{cases} N\equiv 2 \pmod 5 \\ N\equiv 5 \pmod 7 \end{cases}$$

を満たすので，宿題 4-2 の結果より N は

$N=35l+12$，l はある整数

と表せる．よって，N を 35 で割った余りは $\boxed{12}$ である．