

1

(i) $n = 1$ のときの ♠ を示す。

$n = 1$ のとき、♠ の左辺は $1 \cdot 2 = 2$ 、右辺は $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2$ で
両者は一致するので、 $n = 1$ のときの ♠ はたしかに正しい。

(ii) $n = k$ のときの ♠

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) \cdots \textcircled{1}$$

が正しいならば、 $n = k+1$ のときの ♠

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2) = \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3) \cdots \sharp$$

も正しいことを示す (k は正の整数)。

① が正しいならば、

$$\begin{aligned} (\sharp \text{ の左辺}) &= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2) \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= (k+1)(k+2)\left(\frac{1}{3}k+1\right) \\ &= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3) \\ &= (\sharp \text{ の右辺}) \end{aligned}$$

より、 $\sharp$ はたしかに正しい。

(i)(ii) より、♠ がすべての自然数 n について成り立つことが示せた。

2

(1) $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ とおくと、

$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n \quad \text{と、}$$

$$S = n + (n-1) + (n-3) + \cdots + 1 \quad \text{の辺々を足して、}$$

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)}_{n \text{ 個}}$$

$$\therefore S = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$(2) \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \boxed{\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)} \cdots \spadesuit$$

と予想できるので、これが正しいことを帰納法で示す。

(i) $n = 1$ のときの $\spadesuit$ を示す。

$n = 1$ のとき、 $\spadesuit$ の左辺は $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ 、右辺は $\frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 6$ で両者は一致するので、 $n = 1$ のときの $\spadesuit$ はたしかに正しい。

(ii) $n = k$ のときの $\spadesuit$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3) \cdots \textcircled{1}$$

が正しいならば、 $n = k+1$ のときの $\spadesuit$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + \cdots + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{1}{4}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) \cdots \sharp$$

も正しいことを示す (k は正の整数)。

$\textcircled{1}$ が正しいならば、

$$(\sharp \text{ の左辺}) = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3) + (k+1)(k+2)(k+3) \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= (k+1)(k+2)(k+3)\left(\frac{1}{4}k+1\right)$$

$$= \frac{1}{4}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$$

$$= (\sharp \text{ の右辺})$$

より、 $\sharp$ はたしかに正しい。

(i)(ii) より、 $\spadesuit$ がすべての自然数 n について成り立つことが示せた。