

1

$$(1) \sum_{k=1}^3 k = 1 + 2 + 3 = \boxed{6}$$

$$(2) \sum_{k=1}^3 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2 + 4 + 8 = \boxed{14}$$

$$\begin{aligned}(3) \sum_{k=1}^3 (k + 2^k) &= (1 + 2^1) + (2 + 2^2) + (3 + 2^3) \\ &= (1 + 2 + 3) + (2^1 + 2^2 + 2^3) \\ &= ((1) \text{ の答え}) + ((2) \text{ の答え}) = 6 + 14 = \boxed{20}\end{aligned}$$

$$(\text{注}) \sum_{k=1}^3 (k + 2^k) = \sum_{k=1}^3 k + \sum_{k=1}^3 2^k \text{ となっていることに注意しておこう。}$$

$$(4) \sum_{k=1}^3 (k \times 2^k) = (1 \times 2^1) + (2 \times 2^2) + (3 \times 2^3) = 2 + 8 + 24 = \boxed{34}$$

(注) もちろん、((1) の答え) $\times$ ((2) の答え) とは一致しない。

2

○, ×, △を合計 n 個並べてできる記号列のうち○を奇数個含むものの個数を a_n とする。求めるべきものは a_7 である。

○, ×, △を合計 n 個並べてできる記号列のうち○を奇数個含むものは、次の 3 タイプに分類できる。

(タイプ A) 左端が○であり、残り $n - 1$ 文字の中に○を偶数個含むもの

(タイプ B) 左端が×であり、残り $n - 1$ 文字の中に○を奇数個含むもの

(タイプ C) 左端が△であり、残り $n - 1$ 文字の中に○を奇数個含むもの

タイプ B とタイプ C はそれぞれ a_{n-1} 個ある。

タイプ A は、○, ×, △を合計 $n - 1$ 個並べてできる記号列のうち○を偶数個含むものの個数だけある。○, ×, △を合計 $n - 1$ 個並べてできる記号列は全部で 3^{n-1} 通りあり、そのうち○を奇数個含むものが a_{n-1} 個あるので、○を偶数個含むものは $3^{n-1} - a_{n-1}$ 個ある。よって、タイプ A は $3^{n-1} - a_{n-1}$ 個ある。

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-1} + (3^{n-1} - a_{n-1}) \quad \therefore a_n = a_{n-1} + 3^{n-1}$$

が成り立つ。 $a_1 = 1$ はすぐにわかるので、

$$a_2 = a_1 + 3^1 = 1 + 3 = 4$$

$$a_3 = a_2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

$$a_4 = a_3 + 3^3 = 13 + 27 = 40$$

$$a_5 = a_4 + 3^4 = 40 + 81 = 121$$

$$a_6 = a_5 + 3^5 = 121 + 243 = 364$$

$$a_7 = a_6 + 3^6 = 364 + 729 = \boxed{1093 \text{ (通り)}}$$

を得る。

(注) $a_7 = a_1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6$ なので、等比数列の和として計算してもよい。これにより、一般に $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$ であることが分かる。