

ー 中3C 宿題プリント (3 学期-1) 解答 ー

宿題 1-1

等差数列 $13, 9, 5, \dots$ について以下の問に答えよ。

- (1) 公差を求めよ。
- (2) 第 20 項 a_{20} を求めよ。
- (3) 第 n 項 a_n を n の式で表せ。

$$(1) \quad 9 - 13 = \boxed{-4} \quad (5 - 9 = -4 \text{ でも可})$$

$$(2) \quad a_{20} = a_1 + \underbrace{(-4) + (-4) + \dots + (-4)}_{19 \text{ 個}} \\ = 13 + (-4) \cdot 19 = \boxed{-63}$$

$$(3) \quad a_n = a_1 + (-4) \cdot (n - 1) = 13 - 4n + 4 = \boxed{-4n + 17}$$

宿題 1-2

第 10 項が 19, 第 15 項が 34 である等差数列の第 n 項 a_n を n の式で表せ。

公差を d とおくと、

$$a_{15} = a_{10} + 5d \text{ より}$$

$$34 = 19 + 5d$$

$$d = \frac{15}{5} = 3$$

第 n 項は第 10 項から $n - 10$ だけずれているので、

$$a_n = a_{10} + 3(n - 10) \text{ が成立する。}$$

(この等式は $n \leq 10$ でも成立する。)

よって、

$$a_n = 19 + 3(n - 10) = \boxed{3n - 11} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

宿題 1-3

以下の数列は等比数列である。初項 a_1 および、公比を求めよ。

(1),(2) については、第 n 項 a_n を表す n の式も求めよ。

$$(1) \quad 2, -6, 18, \dots$$

$$(2) \quad \square, 27, \square, \square, 8, \dots$$

$$(3) \quad \text{第 } n \text{ 項が } 5 \cdot 3^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(4) \quad \text{第 } n \text{ 項が } \frac{5^{n-1}}{4^{n+1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(1) \quad \text{初項は } a_1 = \boxed{2}$$

$$\text{公比は } \frac{-6}{2} = \boxed{-3}$$

$$\text{第 } n \text{ 項 } a_n \text{ は } a_n = \boxed{2(-3)^{n-1}}$$

$$(2) \quad \text{公比を } r \text{ とおくと、}$$

$$27 \cdot r^3 = 8$$

$$r^3 = \frac{8}{27}$$

$$\therefore r = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$a_1 \cdot \frac{2}{3} = 27 \text{ より、} a_1 = \boxed{\frac{81}{2}}$$

$$\text{第 } n \text{ 項 } a_n \text{ は、} a_n = \boxed{\frac{81}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$$

$$\text{補足：第 2 項を基準として、} a_n = 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \\ \text{などでも可。}$$

$$(3) \quad n = 1 \text{ を代入して、初項 } a_1 \text{ は、} a_1 = 5 \cdot 3^1 = \boxed{15} \\ \text{項番号 } n \text{ を 1 増やすと、} 5 \cdot 3^n \text{ の値は 3 倍になるので、} \\ \text{公比は } \boxed{3}$$

$$(4) \quad n = 1 \text{ を代入して、初項 } a_1 \text{ は、} a_1 = \frac{5^0}{4^2} = \boxed{\frac{1}{16}} \\ \text{項番号 } n \text{ を 1 増やすと、} \frac{5^{n-1}}{4^{n+1}} \text{ の値は } \frac{5}{4} \text{ 倍になるの} \\ \text{で、公比は } \boxed{\frac{5}{4}}$$

宿題 1-4

- (1) x, y が全実数を動くとき、 $z = x^2 + 4y^2 + 4x - 4y + 7$ の最小値と、そのときの x, y の値を求めよ。
- (2) x, y が全実数を動くとき、 $z = x^2 - 4xy + 7y^2 + 2x + 2y + 1$ の最小値と、そのときの x, y の値を求めよ。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad z &= x^2 + 4x + 4y^2 - 4y + 7 \\
 &= (x+2)^2 - 2^2 + 4(y^2 - y) + 7 \\
 &= (x+2)^2 + 4 \left\{ \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\} + 7 \\
 &= (x+2)^2 + 4 \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 + 7 \\
 &= \underbrace{(x+2)^2}_{0 \text{ 以上}} + \underbrace{4 \left(y - \frac{1}{2}\right)^2}_{0 \text{ 以上}} + 6 \\
 &\geq 6 \\
 \text{等号は } x &= -2 \text{ かつ } y = \frac{1}{2} \text{ のとき成り立つので、} \\
 z \text{ の最小値は } &\boxed{6} \quad (x = \boxed{-2}, y = \boxed{\frac{1}{2}})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad z &= x^2 - 4xy + 7y^2 + 2x + 2y + 1 \\
 &= x^2 + (2 - 4y)x + 7y^2 + 2y + 1 \\
 &\quad (x \text{ に注目して整理}) \\
 &= (x + (1 - 2y))^2 - (1 - 2y)^2 + 7y^2 + 2y + 1 \\
 &\quad (x \text{ について平方完成}) \\
 &= (x + 1 - 2y)^2 + 3y^2 + 6y \\
 &= \underbrace{(x + 1 - 2y)^2}_{0 \text{ 以上}} + \underbrace{3(y + 1)^2}_{0 \text{ 以上}} - 3 \\
 &\geq -3 \\
 \text{等号は } x + 1 - 2y &= 0 \text{ かつ } y + 1 = 0 \text{ すなわち} \\
 x = -3 \text{ かつ } y &= -1 \text{ のとき成り立つので、} \\
 z \text{ の最小値は } &\boxed{-3} \quad (x = \boxed{-3}, y = \boxed{-1})
 \end{aligned}$$

宿題 1-5

x, y を正の実数とする。
 $xy = 2$ のとき、 $z = 2x + 3y$ の最小値と、そのときの x, y の値を求めよ。

相加・相乗平均の不等式より、

$$\frac{2x + 3y}{2} \geq \sqrt{2x \cdot 3y}$$

$$2x + 3y \geq 2\sqrt{6xy}$$

が成立。

$$\text{これに } xy = 2 \text{ を代入すると、} 2x + 3y \geq 4\sqrt{3} \cdots \textcircled{1}$$

① の等号は $2x = 3y$ かつ $xy = 2$ のとき、すなわち

$$x = \sqrt{3} \text{ かつ } y = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ のとき成立するので、}$$

$$z = 2x + 3y \text{ の最小値は } \boxed{4\sqrt{3}} \quad (x = \boxed{\sqrt{3}}, y = \boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}})$$