

－ 中 3C 宿題プリント (3 学期-2) 解答 －

宿題 2-1

(1) 和 $S_1 = \sum_{k=2}^4 k^2$ を計算せよ。

(2) 和 $S_2 = \sum_{i=1}^3 (3i - 5)2^i$ を計算せよ。

(3) 和 $1 + 8 + 27 + 64$ を $\sum$ 記号を用いて表せ。

(4) 和 $7 + 11 + 15 + 19 + 23 + 27$ を $\sum$ 記号を用いて表せ。

(1) $S_1 = \sum_{k=2}^4 k^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 = 4 + 9 + 16 = \boxed{29}$

(2) $S_2 = \sum_{i=1}^3 (3i - 5)2^i$
 $= (-2) \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3$
 $= -4 + 4 + 32 = \boxed{32}$

(3) たとえば

$$1 + 8 + 27 + 64 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = \sum_{k=1}^4 k^3$$

と表せる。

(4) 7, 11, 15, 19, 23, 27 は、初項 7, 公差 4 の等差数列になっていて、その第 k 項は

$$7 + 4(k - 1) = 4k + 3$$

と表せる。したがって、たとえば

$$7 + 11 + 15 + 19 + 23 + 27 = \sum_{k=1}^6 (4k + 3) \text{ と表せる。}$$

補足

上記以外にも、

$$7 + 11 + 15 + 19 + 23 + 27 = \sum_{i=0}^5 (7 + 4i)$$

などと表すこともできる。

宿題 2-2

以下の数列は等差数列である。初項 a_1 および、公差を求めよ。

(1),(2) については、第 n 項 a_n を表す n の式、および、初項から第 n 項までの和 S_n も求めよ。

(1) $3, -4, -11, \dots$

(2) $\square, -1, \square, \square, 5, \dots$

(3) 第 n 項が $2n + 3$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

(1) 初項は $a_1 = \boxed{3}$

公差は $(-4) - 3 = \boxed{-7}$

第 n 項 a_n は、

$$a_n = 3 + (-7)(n - 1) = \boxed{-7n + 10}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \dots \textcircled{1}$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 \dots \textcircled{2}$$

右辺で、上下に並ぶ 2 つの数の合計は一定なので、

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ より、

$$2S_n = (a_1 + a_n) \cdot n = (3 + (-7n + 10)) \cdot n$$

$$= (-7n + 13)n$$

$$\therefore S_n = \boxed{\frac{(-7n + 13)n}{2}}$$

(2) 公差を d とおくと、

$$5 - (-1) = 3d$$

$$\therefore d = \boxed{2}$$

$$\text{初項は } a_1 = a_2 - d = (-1) - 2 = \boxed{-3}$$

第 n 項 a_n は、

$$a_n = -3 + 2(n - 1) = \boxed{2n - 5}$$

別解 公差を d とおくと、 $a_n = a_1 + d(n - 1)$ と表せ、

$$a_2 = -1, a_5 = 5 \text{ より、}$$

$$\begin{cases} -1 = a_1 + d \\ 5 = a_1 + 4d \end{cases}$$

$$\text{これを連立して解くと、} a_1 = \boxed{-3}, d = \boxed{2}$$

$$\text{よって、} a_n = -3 + 2(n - 1) = \boxed{2n - 5}$$

和 S_n は (1) と同様にして、

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{((-3) + (2n - 5))n}{2}$$

$$= \frac{(2n - 8)n}{2} = \boxed{(n - 4)n}$$

(3) $n = 1$ を代入して、初項は $a_1 = 2 \cdot 1 + 3 = \boxed{5}$

項番号 n を 1 増やすと $2n + 3$ の値は 2 増えるので、

公差は $\boxed{2}$

宿題 2-3

5, 15, 45, ... という等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

初項が 5, 公比が $\frac{15}{5} = 3$ の等比数列なので、
第 n 項は $5 \cdot 3^{n-1}$ である。

よって、

$$S_n = 5 + 5 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$3S_n = 5 \cdot 3 + 5 \cdot 3^2 + \cdots + 5 \cdot 3^{n-1} + 5 \cdot 3^n \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ より

$$2S_n = 5 \cdot 3^n - 5$$

$$S_n = \boxed{\frac{5 \cdot 3^n - 5}{2}}$$

宿題 2-4

$x + 2y = 3$ のとき、 $z = x^2 + y^2$ の最小値を求めよ。

コーシー・シュワルツの不等式

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を用いて解く。

$\textcircled{1}$ より、

$$(1^2 + 2^2)(x^2 + y^2) \geq (1x + 2y)^2$$

$$5(x^2 + y^2) \geq 3^2 \quad (x + 2y = 3 \text{ より})$$

$$x^2 + y^2 \geq \frac{9}{5} \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成立。

$\textcircled{2}$ の等号は、 $1 : 2 = x : y$ かつ $x + 2y = 3$ のときに成立する。

$$y = 2x \text{ を } x + 2y = 3 \text{ に代入して、} 5x = 3 \quad \therefore x = \frac{3}{5}$$

$$\text{このとき、} y = 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$$

よって、 $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{6}{5}$ のとき $\textcircled{2}$ の等号は成立するので、

$$z = x^2 + y^2 \text{ の最小値は、} \boxed{\frac{9}{5}}$$

別解

$x = 3 - 2y$ を $z = x^2 + y^2$ に代入して、 $z = (3 - 2y)^2 + y^2$ と変形し、 y の 2 次関数の最小値を調べる、という方針でも解ける。

宿題 2-5

x, y を実数とする。次の不等式が成り立つことを証明せよ。
また、等号成立条件も求めよ。

$$x^2 + 2xy + 4y^2 + 7 \geq 4x - 2y$$

(左辺) - (右辺)

$$= x^2 + 2xy + 4y^2 + 7 - (4x - 2y)$$

$$= x^2 + (2y - 4)x + 4y^2 + 2y + 7$$

$$= (x + (y - 2))^2 - (y - 2)^2 + 4y^2 + 2y + 7$$

$$= (x + y - 2)^2 + 3y^2 + 6y + 3$$

$$= (x + y - 2)^2 + 3(y + 1)^2$$

$$\geq 0$$

よって、与不等式は成立する。

等号が成立するのは、

$x + y - 2 = 0$ かつ $y + 1 = 0$ すなわち、

$$\boxed{x = 3 \text{ かつ } y = -1} \text{ のときである。}$$