

－ 中 3C 宿題プリント (3 学期-3) 解答 －

宿題 3-1

次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(1) $2, -6, 18, \dots$

(2) $6, 9, \frac{27}{2}, \dots$

(1) $S_n = 2 + 2(-3) + 2(-3)^2 + \dots + 2(-3)^{n-1} \dots \textcircled{1}$

$-3S_n = 2(-3) + \dots + 2(-3)^{n-1} + 2(-3)^n \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より、 $4S_n = 2 - 2(-3)^n$

$\therefore S_n = \boxed{\frac{1 - (-3)^n}{2}}$

(2) $S_n = 6 + 6\left(\frac{3}{2}\right) + 6\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \dots + 6\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \dots \textcircled{1}$

$\frac{3}{2}S_n = 6\left(\frac{3}{2}\right) + \dots + 6\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + 6\left(\frac{3}{2}\right)^n \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ より

$\frac{1}{2}S_n = 6\left(\frac{3}{2}\right)^n - 6$

$\therefore S_n = \boxed{12\left(\frac{3}{2}\right)^n - 12}$

宿題 3-2

すべての自然数 n に対して、

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2 \dots \star$

という等式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ。

I)

$(n = 1 \text{ での } \star \text{ の左辺}) = 1 \cdot 2 = 2$

$(n = 1 \text{ での } \star \text{ の右辺}) = (1-1) \cdot 2^2 + 2 = 2$

なので、 $n = 1$ のとき、 $\star$ の等式は成立。

II)

$n = k$ での $\star$ の等式の成立を仮定する。すなわち、

$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + k \cdot 2^k = (k-1)2^{k+1} + 2 \dots \textcircled{1}$

を仮定する。

このとき、

$(n = k+1 \text{ での } \star \text{ の左辺})$

$= \underbrace{1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + k \cdot 2^k}_{\textcircled{1} \text{ の左辺}} + (k+1)2^{k+1}$

$= \underbrace{(k-1)2^{k+1} + 2}_{\textcircled{1} \text{ の右辺}} + (k+1)2^{k+1} \quad (\textcircled{1} \text{ より})$

$= (k-1)2^{k+1} + 2 + (k+1)2^{k+1}$

$= (k-1+k+1)2^{k+1} + 2$

$= 2k \cdot 2^{k+1} + 2$

$= k \cdot 2^{k+2} + 2$

$= (n = k+1 \text{ での } \star \text{ の右辺})$

となり、 $n = k+1$ でも $\star$ の等式が成立する。

I) と II) で示せたことをあわせると、数学的帰納法により、すべての自然数 n に対して $\star$ の等式が成り立つことが示せた。

宿題 3-3

(1) 中心が $(3, -1)$ で半径 2 の円の式を求めよ。

(2) 原点 O を通り傾き $\frac{1}{2}$ の直線と、 $A(2, 6)$ を通り傾き -2 の直線の交点を P とする。3 点 O, A, P を通る円の式を求めよ。

(3) 2 つの円 $x^2 + y^2 = 7$, $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3$ の 2 交点 P, Q を通る直線の式を求めよ。

(1) $\boxed{(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4}$

(2) 傾きの積が -1 なので、この 2 直線は垂直である。
したがって、 OA を直径とする円 C の周上に点 P があり、 C の式が求めるべきものである。

円 C の中心は線分 OA の中点 $(1, 3)$ であり、

半径は $\sqrt{(1-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10}$ であるから、

$\boxed{(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10}$

(3) $x^2 + y^2 = 7 \dots \textcircled{1}$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3 \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より

$2x - 1 + 4y - 4 = 4$

$2x + 4y - 9 = 0 \dots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を両方みたす実数 x, y は $\textcircled{3}$ も満たすので、

$\textcircled{3}$ の表す直線は、2 交点 P, Q を通る。

よって、求める直線 PQ の式は、 $\boxed{2x + 4y - 9 = 0}$

宿題 3-4

AB = 2, BC = 3, CD = 6, DA = 5 である四角形 ABCD があり、この四角形は円 O に内接している。

- (1) $\cos \angle ABC$ と AC の長さを求めよ。
- (2) 円 O の半径 R を求めよ。
- (3) 四角形 ABCD の面積 S を求めよ。
- (4) 四角形 ABCD はある円に外接している。この円の半径 r を求めよ。

- (1) 三角形 ABC で余弦定理より、

$$AC^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos \angle ABC \\ = 13 - 12 \cos \angle ABC \cdots \textcircled{1}$$

三角形 ADC で余弦定理より、

$$AC^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos \angle ADC$$

四角形 ABCD は円 O に内接しているので、

$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$$

よって、 $-\cos \angle ABC = \cos \angle ADC$ だから、

$$AC^2 = 61 + 60 \cos \angle ABC \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より、} \cos \angle ABC = \boxed{-\frac{2}{3}}, \quad AC = \boxed{\sqrt{21}}$$

- (2) $(\cos \angle ABC)^2 + (\sin \angle ABC)^2 = 1$ および、
 $0^\circ < \angle ABC < 180^\circ$ より $\sin \angle ABC > 0$ なので、

$$\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

円 O は三角形 ABC の外接円だから、正弦定理より

$$2R = \frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} \quad \therefore R = \boxed{\frac{3\sqrt{105}}{10}}$$

- (3) 四角形 ABCD の面積 S は、三角形 ABC と三角形 ADC の面積の和であるから、

$$S = \frac{1}{2} BA \cdot BC \cdot \sin \angle ABC + \frac{1}{2} DA \cdot DC \cdot \sin \angle ADC$$

$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ より、

$$\sin \angle ABC = \sin \angle ADC = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{ だから、}$$

$$S = \frac{1}{2} (2 \cdot 3 + 5 \cdot 6) \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \boxed{6\sqrt{5}}$$

- (4) 四角形 ABCD が外接している円の中心を I とおくと、
 S は、三角形 IAB, IBC, ICD, IDA の面積の和。

I から各辺に下した垂線の長さは半径 r と等しいので、
 それぞれの三角形の面積は、 $\frac{1}{2} \cdot (\text{辺の長さ}) \cdot r$ である。

$$\text{よって、} S = \frac{1}{2} (2 + 3 + 5 + 6)r = 6\sqrt{5} = 8r$$

$$\therefore r = \boxed{\frac{3\sqrt{5}}{4}}$$

<補足> 三角形の内接円の半径を求めるのと同じで
 すね。

宿題 3-5

$f(x) = x^2 - 6ax + \frac{9}{2}a$ とする。

$0 \leq x \leq 2$ のとき、 $f(x)$ の最小値 $m(a)$ を a の式で表せ。

$$f(x) = (x - 3a)^2 - (3a)^2 + \frac{9}{2}a \text{ より、}$$

$y = f(x)$ のグラフは、頂点が $\left(3a, -9a^2 + \frac{9}{2}a\right)$ である
 下に凸な放物線である。

$3a \leq 0$ のとき ($a \leq 0$ のとき)

$0 \leq x \leq 2$ の範囲で、 $f(x)$ は増加していくので、 $f(x)$ は
 $x = 0$ で最小となり、

$$m(a) = f(0) = \frac{9}{2}a$$

$0 \leq 3a \leq 2$ のとき ($0 \leq a \leq \frac{2}{3}$ のとき)

$0 \leq x \leq 2$ の範囲に頂点が含まれているので、 $f(x)$ は
 $x = 3a$ において最小となり、

$$m(a) = -9a^2 + \frac{9}{2}a$$

$3a \geq 2$ のとき ($a \geq \frac{2}{3}$ のとき)

$0 \leq x \leq 2$ の範囲で、 $f(x)$ は減少していくので、 $f(x)$ は
 $x = 2$ で最小となり、

$$m(a) = f(2) = 4 - 12a + \frac{9}{2}a = -\frac{15}{2}a + 4$$

以上をまとめると、

$$m(a) = \begin{cases} \frac{9}{2}a & \cdots a \leq 0 \text{ のとき} \\ -9a^2 + \frac{9}{2}a & \cdots 0 \leq a \leq \frac{2}{3} \text{ のとき} \\ -\frac{15}{2}a + 4 & \cdots a \geq \frac{2}{3} \text{ のとき} \end{cases}$$