－ 中3C　宿題プリント (3学期-4)　解答 －

宿題 4-1

$a_1 = 3 \cdots ①$

$a_{n+1} = \dfrac{{a_n}^2 - 4}{n} - 1 \cdots ②\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$

で定まる数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を表す n の式を予想し、そのことを数学的帰納法で示せ。

② で $n = 1$ を代入すると、

$$a_2 = \frac{{a_1}^2 - 4}{1} - 1 = \frac{3^2 - 4}{1} - 1 \quad (①より) = 4$$

② で $n = 2$ を代入すると、

$$a_3 = \frac{{a_2}^2 - 4}{2} - 1 = \frac{4^2 - 4}{2} - 1 \quad (a_2 = 4 より) = 5$$

② で $n = 3$ を代入すると、

$$a_4 = \frac{{a_3}^2 - 4}{3} - 1 = \frac{5^2 - 4}{3} - 1 \quad (a_3 = 5 より) = 6$$

以上より、$a_n = n + 2 \cdots ☆$ が全ての自然数 n で成り立つ、と予想される。これを数学的帰納法で示す。

I) $n = 1$ のとき
(☆の左辺) $= a_1 = 3$　(①より)
(☆の右辺) $= 1 + 2 = 3$
なので、☆の等式は成立。

II) $n = k$ での☆の成立を仮定する。
すなわち、$a_k = k + 2 \cdots ③$ を仮定する。

($n = k + 1$ での☆の左辺)

$$= a_{k+1}$$
$$= \frac{{a_k}^2 - 4}{k} - 1 \quad (②の漸化式より)$$
$$= \frac{(k+2)^2 - 4}{k} - 1 \quad (③より)$$
$$= \frac{k^2 + 4k}{k} - 1$$
$$= k + 4 - 1$$
$$= (k + 1) + 2$$

となり、これは $n = k + 1$ での☆の右辺 と一致している。
すなわち、$n = k + 1$ でも☆の等式が成り立つ、と示せた。

I),II) で示せたことを組み合わせると、数学的帰納法により、すべての自然数 n で $a_n = n + 2 \cdots ☆$ が成り立つと示せた。

宿題 4-2

x, y は実数で、$x > 6, y > 0$ とする。
$x - 6, x, y$ がこの順で等比数列であり、$x - 9, x, y - x$ がこの順で等差数列であるとする。x, y を求めよ。

$x - 6, x, y$ がこの順で等比数列なので、

$$\frac{x}{x-6} = \frac{y}{x}$$

$x^2 = y(x - 6) \cdots ①$

$x - 9, x, y - x$ がこの順で等差数列なので、

$x - (x - 9) = (y - x) - x$

$y = 2x + 9 \cdots ②$

② を ① に代入すると

$x^2 = (2x + 9)(x - 6)$

$x^2 - 3x - 54 = 0$

$(x + 6)(x - 9) = 0$

$x = -6, 9$

$x > 6$ なので、$x = \boxed{9}$

① より、$y = 2 \cdot 9 + 9 = \boxed{27}$

宿題 4-3

a を定数とする。

x の 2 次方程式 $x^2-ax-a+3=0$ が 2 解 (重解を含む) をもち、それらが共に正であるような a の範囲を求めよ。

$f(x)=x^2-ax-a+3$ とおく。

$f(x)=0$ の実数解は、$y=f(x)$ のグラフ C の x 切片であるから、問題文の条件を満たすのは、C が x 軸の正の部分と異なる 2 点で交わるか接するとき。

これは、C が下に凸な放物線であることに注意すると、

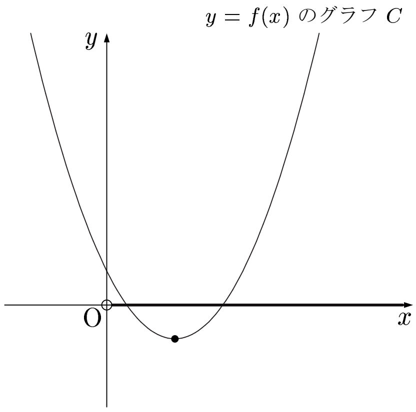
ア) C の頂点の x 座標が正

イ) C の頂点の y 座標が 0 以下

(2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式が 0 以上)

ウ) C の y 切片が正

をすべて満たすときである。



$$f(x)=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2-a+3$$

より、C の頂点は、$\left(\dfrac{a}{2},-\dfrac{a^2}{4}-a+3\right)$ であり、

C の y 切片は $f(0)=-a+3$ であるから、それぞれの条件を a の式で表すと、

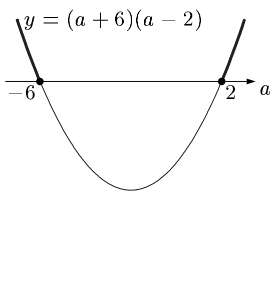
ア) $\dfrac{a}{2}>0 \quad \therefore\ a>0 \ \cdots ①$

イ) $-\dfrac{a^2}{4}-a+3 \leqq 0$

$a^2+4a-12 \geqq 0$

$(a+6)(a-2) \geqq 0$

$\therefore\ a \leqq -6,\ a \geqq 2 \ \cdots ②$



ウ) $-a+3>0 \quad \therefore\ a<3 \ \cdots ③$

となる。

①, ②, ③ のすべてを満たす a の範囲は、

$\boxed{2 \leqq a<3}$ である。

<u>別解</u>

$x^2-ax-a+3=0 \ \cdots ④$ は

$x^2+3=a(x+1)$ と変形できるので、

④ の実数解は、$y=x^2+3$ のグラフ D と、

$y=a(x+1)$ のグラフ ℓ の共有点の x 座標とみなせる。

ℓ は x 切片が -1 で、傾きが a である直線であり、求める a の範囲は、

「ℓ が D の $x>0$ の部分と異なる 2 点で交わるか接する」ような傾き a の範囲である。

これをグラフから読み取るために、放物線 D と直線 ℓ が接する場合について調べる。

それは ④ が重解を持つときであり、④ を

$\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2=\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+a-3 \ \cdots ④'$

と平方完成したときの右辺が 0 のときなので、

$\dfrac{a^2}{4}+a-3=0$

$a^2+4a-12=0$

$(a+6)(a-2)=0$

$a=-6,2$

④′ より、重解は $x=\dfrac{a}{2}$ と表せ、これが D と ℓ の接点の x 座標だから、

$a=-6$ のとき、接点は $(-3,12)$

$a=2$ のとき、接点は $(1,4)$

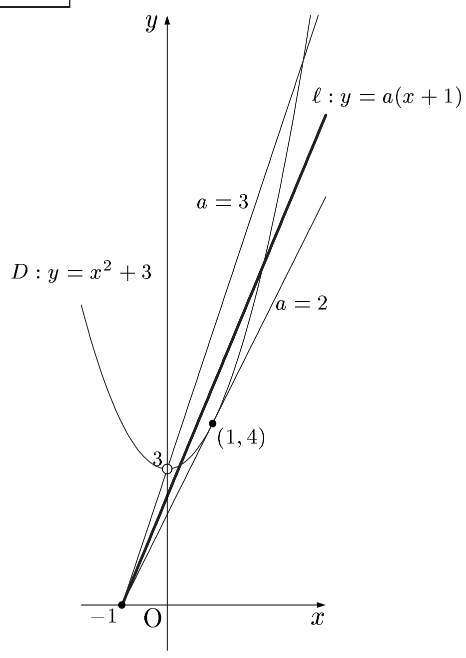
だとわかる。(D の式 $y=x^2+3$ から y 座標を求めた)

また、直線 ℓ: $y=a(x+1)$ が点 $(0,3)$ を通るのは、

$3=a\cdot 1 \quad \therefore\ a=3$ のときである。

したがって、下図のようだとわかり、ℓ が D の $x>0$ の部分と異なる 2 点で交わるか接する a の範囲は

$\boxed{2 \leqq a<3}$ である。



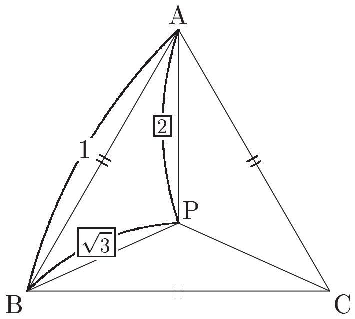
宿題 4-4

平面上に 4 点 A,B,C,P があり、
$AB = BC = CA = 1$, $PA : PB : PC = 2 : \sqrt{3} : \sqrt{3}$
をみたしている。

(1) $\angle PAB$ を求めよ。

(2) PB の長さを x とおき、$\triangle PAB$ に注目して、x の方程式を作れ。

(3) ありうる x の値をすべて求めよ。



(1) $PB = PC$ より、直線 AP は BC の垂直 2 等分線。
よって、$\angle PAB = \dfrac{1}{2}\angle CAB = \dfrac{1}{2}\cdot 60^\circ = \boxed{30^\circ}$

(2) $PB = x$ と $PA : PB = 2 : \sqrt{3}$ より、$PA = \dfrac{2}{\sqrt{3}}x$

$\triangle PAB$ で余弦定理を用いると、

$$PB^2 = AB^2 + PA^2 - 2AB\cdot PA\cdot\cos 30^\circ$$

$$x^2 = 1^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x\right)^2 - 2\cdot 1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\boxed{x^2 - 6x + 3 = 0}\ \cdots ①$$

(3) ① を解くと

$$(x-3)^2 - 9 + 3 = 0$$

$$(x-3)^2 = 6$$

$$x - 3 = \pm\sqrt{6}$$

$$x = \boxed{3 \pm \sqrt{6}}$$

＜補足＞ 条件を満たす点 P は以下のような 2 つがある。