－ 中3C　宿題プリント (3学期-5)　解答 －

宿題 5-1

$S_n=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(3j^2+3j+1)$ とする。

(1) $S_1,\ S_2,\ S_3$ をそれぞれ求めよ。

(2) S_n を表す n の式を予想し、その予想が正しいことを帰納法で証明せよ。

(1) $S_n=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(3j^2+3j+1)$ …① で $n=1$ を代入すると、

$$S_1=\sum_{j=1}^{1}(3j^2+3j+1)=3\cdot1^2+3\cdot1+1=\boxed{7}$$

① で $n=2$ を代入すると、

$$S_2=\sum_{j=1}^{2}(3j^2+3j+1)=7+(3\cdot2^2+3\cdot2+1)$$
$$=7+19=\boxed{26}$$

① で $n=3$ を代入すると、

$$S_3=\sum_{j=1}^{3}(3j^2+3j+1)=7+19+(3\cdot3^2+3\cdot3+1)$$
$$=7+19+37=\boxed{63}$$

(2) (1) より、$S_n=(n+1)^3-1$ …☆ が全ての自然数 n で成り立つ、と予想される。
これを数学的帰納法で示す。

I) $n=1$ のとき

(☆の左辺) $=S_1=\displaystyle\sum_{j=1}^{1}(3j^2+3j+1)=7$

(☆の右辺) $=(1+1)^3-1=8-1=7$

なので、☆の等式は成立。

II) $n=k$ での☆の成立を仮定する。

すなわち、$S_k=\displaystyle\sum_{j=1}^{k}(3j^2+3j+1)=(k+1)^3-1$ …②

を仮定する。

($n=k+1$ での☆の左辺)

$$=S_{k+1}=\sum_{j=1}^{k+1}(3j^2+3j+1)$$
$$=\sum_{j=1}^{k}(3j^2+3j+1)\ +(3(k+1)^2+3(k+1)+1)$$
$$=(k+1)^3-1+(3k^2+6k+3+3k+3+1)$$

(②より)

$$=k^3+3k^2+3k+1-1+3k^2+9k+7$$
$$=k^3+6k^2+12k+7$$

($n=k+1$ での☆の右辺)

$$=(k+1+1)^3-1$$
$$=(k+2)^3-1$$
$$=k^3+3\cdot k^2\cdot2+3k\cdot2^2+2^3-1$$
$$=k^3+6k^2+12k+7$$

となるので、$n=k+1$ でも☆の等式が成り立つ、と示せた。

I),II) で示せたことを組み合わせると、数学的帰納法により、すべての自然数 n で $S_n=(n+1)^3-1$ …☆ が成り立つと示せた。

宿題 5-2

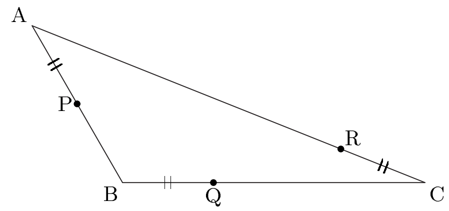
3辺の長さが $\mathrm{AB}=3,\ \mathrm{BC}=5,\ \mathrm{CA}=7$ である三角形 ABC がある。
辺 AB,BC,CA 上に3点 P,Q,R を $\mathrm{AP}=\mathrm{BQ}=\mathrm{CR}=x\ (0<x<3)$ となるようにとる。

(1) ∠ABC を求めよ。

(2) 三角形 BPQ の面積を x で表せ。

(3) 三角形 PQR の面積 S を x で表せ。

(4) S が最小となるときの x の値を求めよ。



(1) △ABC において、余弦定理を用いると、

$$7^2=3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cdot\cos\angle\mathrm{ABC}$$
$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot3\cdot5}=\frac{-15}{2\cdot3\cdot5}=-\frac{1}{2}$$

$0^\circ<\angle\mathrm{ABC}<180^\circ$ なので、$\angle\mathrm{ABC}=\boxed{120^\circ}$

(2) (三角形 BPQ の面積)

$$=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BP}\cdot\mathrm{BQ}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}$$
$$=\frac{1}{2}(3-x)x\cdot\sin120^\circ$$
$$=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{4}(3-x)x}$$

(3) (三角形 ABC の面積) $=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BC}\cdot\sin\angle\mathrm{ABC}$

$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\cdot\sin120^\circ=\frac{15\sqrt{3}}{4}$$

(三角形 CQR の面積)

$$=\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{CA}}\cdot(\text{三角形 ABC の面積})$$
$$=\frac{5-x}{5}\cdot\frac{x}{7}\cdot\frac{15\sqrt{3}}{4}\ \cdots①$$

(三角形 APR の面積)

$= \dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AB}} \cdot \dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}} \cdot$ (三角形 ABC の面積)

$= \dfrac{x}{3} \cdot \dfrac{7-x}{7} \cdot \dfrac{15\sqrt{3}}{4} \quad \cdots$ ②

(三角形 PQR の面積 S)

$=$ (三角形 ABC の面積) $-$ (三角形 BPQ の面積)

$\quad -$ (三角形 CQR の面積) $-$ (三角形 APR の面積)

$= \dfrac{15\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}(3-x)x - \dfrac{5-x}{5} \cdot \dfrac{x}{7} \cdot \dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

$\quad - \dfrac{x}{3} \cdot \dfrac{7-x}{7} \cdot \dfrac{15\sqrt{3}}{4}$ (①, ②, (2) の結果より)

$= \dfrac{\sqrt{3}}{28}\left\{7 \cdot 15 - 7(3-x)x - 3(5-x)x - 5x(7-x)\right\}$

$= \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{28}(15x^2 - 71x + 105)}$

(4) $S = \dfrac{\sqrt{3}}{28}\left\{15\left(x - \dfrac{71}{30}\right)^2 - 15\left(\dfrac{71}{30}\right)^2 + 105\right\}$ および

$0 < \dfrac{71}{30} < 3$ より、S が最小となるのは $x = \boxed{\dfrac{71}{30}}$

別解

正弦定理より

$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A} = \dfrac{\mathrm{CA}}{\sin B} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C}$

$\dfrac{5}{\sin A} = \dfrac{7}{\sin 120^\circ} = \dfrac{3}{\sin C}$

$\dfrac{5}{\sin A} = \dfrac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{3}{\sin C}$

$\therefore \ \sin A = \dfrac{5\sqrt{3}}{14}, \ \sin C = \dfrac{3\sqrt{3}}{14}$

(三角形 CQR の面積)

$= \dfrac{1}{2}\mathrm{CQ} \cdot \mathrm{CR} \cdot \sin C = \dfrac{1}{2}(5-x)x \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{14}$

(三角形 APR の面積)

$= \dfrac{1}{2}\mathrm{AP} \cdot \mathrm{AR} \cdot \sin A = \dfrac{1}{2} \cdot x \cdot (7-x) \cdot \dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

＜以下省略＞

宿題 5-3

t を正の実数とする。xy 平面上で、

放物線 C: $y = x^2$ 　直線 ℓ: $y = tx + \frac{1}{4}$ 　直線 m: $y = -\frac{1}{t}x + \frac{1}{4}$

を考え、C と ℓ の交点を x 座標の小さい順に A,B とし、C と m の交点を x 座標の小さい順に P,Q とする。

(1) A,B の x 座標を a, b とおくとき、$a+b, ab, b-a$ を求めよ。(文字 t を用いてもよい。)

(2) 線分 AB の長さを t を用いて表せ。

(3) 線分 PQ の長さを t を用いて表せ。

(4) 四角形 APBQ の面積を S とする。S を t を用いて表せ。

(5) S の最小値を求めよ。

(1) a, b は $x^2 = tx + \dfrac{1}{4}$ つまり $x^2 - tx - \dfrac{1}{4} = 0$ の 2 解なので、解と係数の関係より、

$a + b = \boxed{t}, \ ab = \boxed{-\dfrac{1}{4}}$ が成り立つ。

$(b-a)^2 = b^2 - 2ab + a^2 = (a+b)^2 - 4ab$

$= t^2 - 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{4}\right) = t^2 + 1$ より、

$b - a = \boxed{\sqrt{t^2+1}}$ $(a < b$ より$)$

(2) A,B は放物線 C 上なので、$\mathrm{A}(a, a^2)$, $\mathrm{B}(b, b^2)$ と表せ、

$\mathrm{AB}^2 = (b-a)^2 + (b^2-a^2)^2 = (b-a)^2 + (b-a)^2(b+a)^2$

$= (b-a)^2\left\{1 + (b+a)^2\right\}$

これに (1) の結果を代入して、

$\mathrm{AB}^2 = (t^2+1)(1+t^2) = (t^2+1)^2$

$\mathrm{AB} = \boxed{t^2+1}$

(3) ℓ, m は y 切片が $\dfrac{1}{4}$ の直線で、傾きが $t, -\dfrac{1}{t}$ だから、(2) の結果において、t を $-\dfrac{1}{t}$ に置き換えれば PQ の長さが得られる。

$\mathrm{PQ} = \left(-\dfrac{1}{t}\right)^2 + 1 = \boxed{\dfrac{1}{t^2} + 1}$

(4) ℓ, m は傾きの積が -1 なので、直交している。よって

$S = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB} \cdot \mathrm{PQ} = \boxed{\dfrac{1}{2}(t^2+1)\left(\dfrac{1}{t^2}+1\right)}$

(5) $S = \dfrac{1}{2}\left(t^2 + \dfrac{1}{t^2} + 2\right)$

$\geqq \dfrac{1}{2}\left(2\sqrt{t^2 \cdot \dfrac{1}{t^2}} + 2\right) = 2$

(相加・相乗平均の不等式より)

等号は $t^2 = \dfrac{1}{t^2}$ すなわち $t = 1$ のとき成立するので、

S の最小値は $\boxed{2}$