中 3 数学 D　復習テスト解答（3 学期-3）

復習 3-1

すべての自然数 n に対して，

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{☆}$$

が成立することを，数学的帰納法で証明する．

次の I), II)の主張を証明すればよい．

I)　$n=k$ のときの☆である

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3) \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

を仮定すれば，$n=k+1$ のときの☆である

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$=\frac{1}{4}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

を導ける．

［証明］

$$[\text{②の左辺}]=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$=\frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3)+(k+1)(k+2)(k+3) \qquad \text{（帰納法の仮定①より）}$$

$$=\frac{1}{4}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$$

$$=[\text{②の右辺}]$$

II)　$n=1$ のときの☆である

$$1\cdot2\cdot3=\frac{1}{4}\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

が成立する．

［証明］

$$[\text{③の左辺}]=6=[\text{③の右辺}]$$

I), II)より，すべての自然数 n に対して☆が成立することが証明された．

復習 3-2

すべての自然数nに対して，

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{0}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{-1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{-(n-2)}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n}{(n+1)(n+2)} \cdots\cdots \text{☆}$$

が成立することを，数学的帰納法で証明する．

次の I), II)の主張を証明すればよい．

I) $n=k$ のときの☆である

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{0}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{-1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{-(k-2)}{k(k+1)(k+2)}=\frac{k}{(k+1)(k+2)} \cdots\cdots ①$$

を仮定すれば，$n=k+1$ のときの☆である

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{0}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{-1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{-(k-2)}{k(k+1)(k+2)}+\frac{-(k-1)}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{k+1}{(k+2)(k+3)} \cdots\cdots ②$$

を導ける．

［証明］

$$[\text{②の左辺}]=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{0}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{-1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{-(k-2)}{k(k+1)(k+2)}+\frac{-(k-1)}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{k}{(k+1)(k+2)}+\frac{-(k-1)}{(k+1)(k+2)(k+3)} \quad \text{（帰納法の仮定①より）}$$

$$=\frac{k(k+3)-(k-1)}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{k+1}{(k+2)(k+3)}=[\text{②の右辺}]$$

II) $n=1$ のときの☆である

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{2\cdot 3} \cdots\cdots ③$$

が成立する．

［証明］

$$[\text{③の左辺}]=\frac{1}{6}=[\text{③の右辺}]$$

I), II)より，すべての自然数nに対して☆が成立することが証明された．