

中3数学D 復習テスト解答 (3学期-4)

復習 4-1

2以上のすべての自然数 n に対して,

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} \cdots \cdots \star$$

が成立することを, 数学的帰納法で証明する.

次の I), II) の主張を証明すればよい.

I) $n=k$ のときの☆である

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を仮定すれば, $n=k+1$ のときの☆である

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

を導ける.

[証明]

[②の左辺] - [②の右辺]

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} - 2 + \frac{1}{k+1} \\ &< 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} - 2 + \frac{1}{k+1} \quad (\text{帰納法の仮定①より}) \\ &= -\frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k+1} = \frac{-(k+1)^2 + k + k(k+1)}{k(k+1)^2} = \frac{-1}{k(k+1)^2} < 0 \end{aligned}$$

したがって, [②の左辺] < [②の右辺].

II) $n=2$ のときの☆である

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} < 2 - \frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

が成立する.

[証明]

$$[\textcircled{3}の左辺] = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}, \quad [\textcircled{3}の右辺] = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$$

したがって, [③の左辺] < [③の右辺].

I), II) より, 2以上のすべての自然数 n に対して☆が成立することが証明された.

復習 4-2#

$$(1) \quad a + \frac{1}{a} = 2 + \sqrt{3} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = \boxed{4}$$

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 = 4^2 - 2 = \boxed{14},$$

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) - \left(a + \frac{1}{a}\right) = 4 \cdot 14 - 4 = \boxed{52}$$

(2) 次の I, II の主張を証明すればよい.

I) $n = k, k+1$ のとき, つまり, $a^k + \frac{1}{a^k}, a^{k+1} + \frac{1}{a^{k+1}}$ が整数であることを仮定すれば,

$n = k+2$ のとき, つまり, $a^{k+2} + \frac{1}{a^{k+2}}$ が整数であることを導ける.

[証明]

$$\begin{aligned} a^{k+2} + \frac{1}{a^{k+2}} &= \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^{k+1} + \frac{1}{a^{k+1}}\right) - \left(a^k + \frac{1}{a^k}\right) \\ &= 4\left(a^{k+1} + \frac{1}{a^{k+1}}\right) - \left(a^k + \frac{1}{a^k}\right) \quad ((1) \text{の結果を利用した}) \end{aligned}$$

であり, 帰納法の仮定より $a^k + \frac{1}{a^k}, a^{k+1} + \frac{1}{a^{k+1}}$ は整数であるから, これは整数である.

II) $n = 1, 2$ のとき, $a + \frac{1}{a}, a^2 + \frac{1}{a^2}$ は整数である.

[証明]

(1)の結果より, $a + \frac{1}{a} = 4, a^2 + \frac{1}{a^2} = 14$ であり, これらは確かに整数である.

I, II より, すべての自然数 n に対して, $a^n + \frac{1}{a^n}$ が整数であることが示された.

(3) (2)より, $N = a^{2019} + \frac{1}{a^{2019}} = (2 + \sqrt{3})^{2019} + \left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right)^{2019}$ は整数であり, $2 + \sqrt{3}$ は正の数なので N は自然数である.

一方, $0 < \frac{1}{2 + \sqrt{3}} < 1$ であり, $\left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{7 + 4\sqrt{3}} < \frac{1}{7 + 3} = \frac{1}{10}$ であるから,

$$\left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right)^{2019} < \left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right)^{2000} = \left\{\left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right)^2\right\}^{1000} < \left(\frac{1}{10}\right)^{1000}$$

つまり, $(2 + \sqrt{3})^{2019} = N - \left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right)^{2019}$ は, 自然数 N から $\left(\frac{1}{10}\right)^{1000}$ 未満の正の数を引いた数なので, 小数表示すると小数第 1 位から 1000 位までは 9 が並ぶ.