中3数学D 3学期 宿題解答 §1 数列と漸化式

宿題 1-1

(1) 公差 $1-5=-4$ なので,

$$a_n = 5 + (-4)\cdot(n-1) = \boxed{-4n+9}$$

(2) 公比 $\dfrac{48}{72} = \dfrac{2}{3}$ なので,

$$a_n = \boxed{72\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$$

(3)

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = a_1 + 2 = 1+2$$
$$a_3 = a_2 + 3 = 1+2+3$$
$$a_4 = a_3 + 4 = 1+2+3+4$$
$$\vdots$$

$\therefore\ a_n = 1+2+3+4+\cdots+n$

であるから,

$$a_n = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

宿題 1-2

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 2a_1 - 3 + 5 = 2 + 2 = 4$$
$$a_3 = 2a_2 - 6 + 5 = 8 - 1 = 7$$
$$a_4 = 2a_4 - 9 + 5 = 14 - 4 = 10$$
$$a_5 = 2a_5 - 12 + 5 = 20 - 7 = 13$$
$$a_6 = 2a_5 - 15 + 5 = 26 - 10 = \boxed{16}$$

※ 訂正

宿題プリントではタイトルが「等差数列」となっていましたが,「数列と漸化式」の誤りでした.

宿題 1-3

(1) $$a_2=\frac{(a_1)^2-12}{2}=\frac{(-4)^2-12}{2}=2$$

$$a_3=\frac{(a_2)^2-12}{2}=\frac{2^2-12}{2}=\boxed{-4}$$

(2) (1)より，$a_3=a_1$ であるから，以降漸化式を利用して計算していくと

$$a_{n+2}=a_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

が成り立つ．すなわち，$\{a_n\}$ は周期 2 の数列である．

よって，$a_{2018}=a_2=\boxed{2}$.

宿題 1-4

(1) $$\begin{aligned} z&=x^2+(x+2)^2\\ &=2x^2+4x+4\\ &=2(x+1)^2+2 \end{aligned}$$

は常に 2 以上であり，

$$2(x+1)^2=0 \quad \therefore x=-1$$

のとき $z=2$ となるので，z の最小値はこのときの $\boxed{2}$ である．

(2) $$\begin{aligned} z&=x^2+(x+2y)^2-(y+2)^2\\ &=2x^2+4xy+3y^2-4y-4\\ &=2(x+y)^2+y^2-4y-4\\ &=2(x+y)^2+(y-2)^2-8 \end{aligned}$$

は常に -8 以上であり，

$$\begin{cases} 2(x+y)^2=0\\ (y-2)^2=0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x=-2\\ y=2 \end{cases}$$

のとき $z=-8$ となるので，z の最小値はこのときの $\boxed{-8}$ である．

宿題 1-5

(1) $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+ax+3$

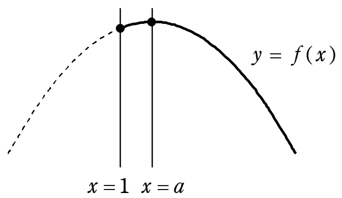
$$=-\frac{1}{2}(x-a)^2+\frac{1}{2}a^2+3$$

であるから，$y=f(x)$ のグラフは上に凸な放物線であり，頂点の座標は

$$\left(a,\frac{1}{2}a^2+3\right)$$

である．

A) $a\geqq 1$ のとき

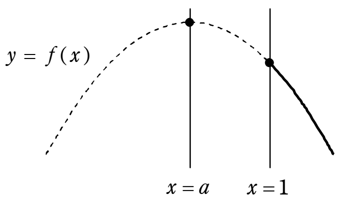


グラフより，最大値は $x=a$ のときの

$$\frac{1}{2}a^2+3$$

である．

B) $a\leqq 1$ のとき



グラフより，最大値は $x=1$ のときの

$$f(1)=a+\frac{5}{2}$$

である．

よって，最大値 $M(a)$ は以下の通り．

$$\boxed{M(a)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}a^2+3 & (1\leqq a\qquad) \\ a+\dfrac{5}{2} & (\qquad a\leqq 1)\end{cases}}$$

※ $a=1$ の場合は，どちらで計算しても同じ結果になっていることにも注意（検算に利用できる）．

(2) ［解法 I］

$f(x)=x^2-ax-a+3$ とおくと，$f(x)=0$ の実数解は，関数 $y=f(x)$ のグラフ C と x 軸の交点の x 座標に他ならない．

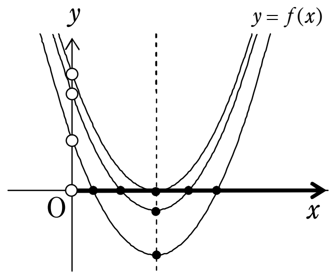
よって，条件を満たすのは，C が x 軸の正の部分と，2 点で交わるか接するときであり，これは

a) C の頂点の x 座標が正

b) C の頂点の y 座標が 0 以下

c) C の y 切片が正

をすべて満たすときである．



C の y 切片は $f(0)=-a+3$，頂点は

$$f(x)=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-a+3$$

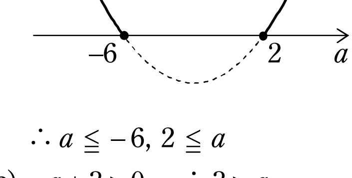
より，$\left(\dfrac{a}{2},-\dfrac{a^2}{4}-a+3\right)$ であるから，それぞれの条件を a の範囲として求めると

a) $\dfrac{a}{2}>0 \quad \therefore a>0$

b) $-\dfrac{a^2}{4}-a+3\leqq 0$

$a^2+4a-12\geqq 0$

$(a+6)(a-2)\geqq 0$



$\therefore a\leqq -6,\ 2\leqq a$

c) $-a+3>0 \quad \therefore 3>a$

となるので，これらをすべて満たす a の範囲は $\boxed{2\leqq a<3}$ である．

［解法 II］

$$x^2-ax-a+3=0$$

$\therefore\ x^2+3=a(x+1)$

の実数解は,

放物線 $C: y=x^2+3$

直線 $l: y=a(x+1)$

の交点の x 座標であり, l は x 切片 -1 , 傾き a の直線であるから, 求める a の範囲は,

l が, C の x 座標正の部分と, 2 点で交わるか接するような, l の傾き a の範囲

に他ならない.

これを, グラフから読み取るために, C と l が接するのがいつかを調べる.

C と l は

$$x^2+3=a(x+1)$$

$\therefore\ x^2-ax-a+3=0$ ………………………… ①

が重解をもつ場合に接し, そのときの a の値は, ①の左辺を平方完成した

$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-a+3=0$$

より

$$-\frac{a^2}{4}-a+3=0$$

$$a^2+4a-12=0$$

$$(a+6)(a-2)=0$$

$\therefore\ a=-6, 2$

また, a がこれらの値のとき, 重解は $x=\dfrac{a}{2}$ である.

したがって, C と l が接するのは

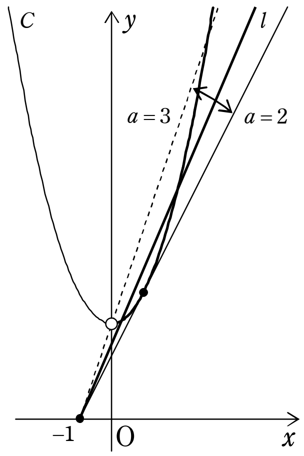
$a=-6$ のとき（接点は $(-3, 12)$ ）と,

$a=2$ のとき（接点は $(1, 4)$ ）

の場合であり, C の x 座標正の部分で接するのは後者の場合である.

また, l が C の x 座標 0 の点 $(0, 3)$ を通るのは, $a=3$ の場合である.

以上を踏まえて, 下図を得る.



図より, 条件を満たす a の範囲は

$\boxed{2 \leqq a < 3}$

である.