

中3数学D 3学期 宿題解答 §2 数列の和

宿題 2-1

$$\begin{aligned}(1) \quad & 199 + 409 + 619 + 829 + 1039 \\ & + 1249 + 1459 + 1669 + 1879 + 2089 \\ & \text{は } 10 \text{ 項の等差数列の和であるから,} \\ & \frac{(199 + 2089) \times 10}{2} = \boxed{11440}\end{aligned}$$

※ 特に意味はないが, 199 から 2089 はすべて素数である.

$$\begin{aligned}(2) \quad & \text{公比 } 7 \text{ の等比数列の和であるから,} \\ & S = 3 + \underline{21 + 147 + \cdots + 50421} \\ & \text{とおくと,} \\ & 7S = \underline{21 + 147 + \cdots + 50421} + 352947 \\ & \text{よって, } 2 \text{ 式の差を取ると,} \\ & 6S = -3 + 352947 = 352944 \\ & \therefore S = \boxed{58824}\end{aligned}$$

宿題 2-2

この等差数列の初項を a , 公差を d , 第 n 項を a_n とすると, 初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \frac{(a + a_n)n}{2}$$

であるから,

$$S_5 = 115, S_{10} = 105$$

より,

$$\frac{(a + a_5) \times 5}{2} = 115 \quad \therefore a + a_5 = 46 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{(a + a_{10}) \times 10}{2} = 105 \quad \therefore a + a_{10} = 21 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つ.

(1) ①, ②より,

$$a_{10} - a_5 = -25$$

ここで, $a_{10} - a_5 = 5d$ なので,

$$5d = -25 \quad \therefore d = \boxed{-5}$$

(2) $a_5 = a + 4d = a - 20$ なので, ①より,

$$a + a - 20 = 46 \quad \therefore a = 33$$

よって

$$a_n = 33 - 5(n - 1) = \boxed{-5n + 38}$$

宿題 2-3

- (1) はじめの妖精さんが現れて $10(k-1)$ 分後から $10k$ 分後までの 10 分間は、 4^{k-1} 人の妖精さんが靴を作るので、 $2 \times 4^{k-1}$ 足の靴ができる。したがって、 $10n$ 分後までに作る靴の総数は

$$S_n = 2 \times 1 + 2 \times 4^1 + 2 \times 4^2 + \cdots + 2 \times 4^{n-1}$$

と表せ、これを計算すると、

$$3S_n = -2 \times 1 + 2 \times 4^n$$

$$\therefore S_n = \frac{2 \times 4^n - 2}{3}$$

- (2) はじめの妖精さんが現れて $5(k-1)$ 分後から $5k$ 分後までの 5 分間は、 2^{k-1} 人の妖精さんが靴を作るので、 2^{k-1} 足の靴ができる。したがって、 $10n = 5 \times 2n$ 分後までに作る靴の総数は

$$T_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{2n-1}$$

と表せ、これを計算すると、

$$T_n = -1 + 2^{2n}$$

$$\therefore T_n = \frac{2^{2n} - 1}{2}$$

- (3) (1), (2) より、

$$S_n = \frac{2}{3} (4^n - 1)$$

$$T_n = (2^2)^n - 1 = 4^n - 1$$

なので、 $\frac{T_n}{S_n} = \frac{3}{2}$.

宿題 2-4

- (1) y を変化させずに x だけを動かせば B の値を変えずに A の値をいくらでも大きくできるし、 x を変化させずに y だけを動かせば A の値を変えずに B の値をいくらでも大きくできるので、 $\boxed{(c)}$.

$$\begin{aligned} (2) \quad A - B &= x^2 + y^2 + 40 - 8x - 10y \\ &= \underbrace{(x-4)^2}_{\substack{0 \text{ 以上の} \\ \text{実数全体を動く}}} + \underbrace{(y-5)^2}_{\substack{0 \text{ 以上の} \\ \text{実数全体を動く}}} - 1 \end{aligned}$$

より、 $A - B$ は -1 以上の実数全体を動くので、 $\boxed{(c)}$.

$$\begin{aligned} (3) \quad A - B &= x^2 + xy + y^2 - 2x - y + 1 \\ &= x^2 + (y-2)x + y^2 - y + 1 \\ &= \left\{ x + \left(\frac{1}{2}y - 1 \right) \right\}^2 - \left(\frac{1}{2}y - 1 \right)^2 + y^2 - y + 1 \\ &= \underbrace{\left\{ x + \left(\frac{1}{2}y - 1 \right) \right\}^2}_{\substack{0 \text{ 以上の実数}}} + \underbrace{\frac{3}{4}y^2}_{\substack{0 \text{ 以上の実数}}} \end{aligned}$$

より、常に $A - B \geq 0$ なので、 $\boxed{(a)}$.

宿題 2-5

(1) 正弦定理より,

$$BC : CA : AB = \sin A : \sin B : \sin C \\ = \boxed{1 : 2 : \sqrt{7}}$$

(2) (1)の結果より,

$BC = t, CA = 2t, AB = \sqrt{7}t$
 とおくことができる ($t > 0$).
 余弦定理より,

$$\cos \angle C = \frac{BC^2 + CA^2 - AB^2}{2 \cdot BC \cdot CA} \\ = \frac{t^2 + (2t)^2 - (\sqrt{7}t)^2}{2 \cdot t \cdot 2t} = -\frac{1}{2}$$

であるから, $\angle C = \boxed{120^\circ}$ である.

$$(3) \quad S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CA \sin \angle C$$

$$= \frac{1}{2} \cdot t \cdot 2t \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} t^2$$

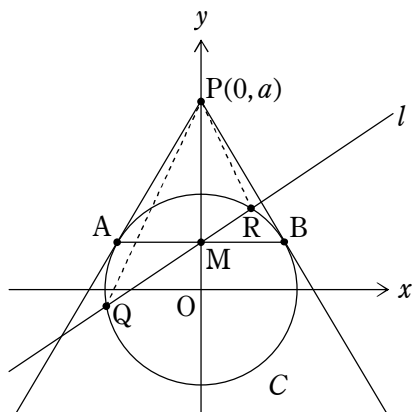
であるから,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} t^2 = 2\sqrt{3} \quad t^2 = 4 \quad \therefore t = 2 (> 0)$$

したがって, $BC = t = \boxed{2}$.

チャレンジおまけ宿題 2-A

$$C: x^2 + y^2 = 1 \cdots \cdots \cdots \textcircled{1}$$



(1) y 軸に関する対称性より, AB は y 軸と垂直であり, M は AB と y 軸との交点になっているので,

$$OM = OA \times \cos(\angle POA)$$

であり, PA は接線で OA と垂直なので,

$$\cos(\angle POA) = \frac{OA}{PO} = \frac{1}{a}$$

であるから, $OM = 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$.

$$\therefore M \left(0, \frac{1}{a} \right)$$

(2) l は傾き m , y 切片 $\frac{1}{a}$ の直線なので,

$$y = mx + \frac{1}{a}$$

$$\therefore (\boxed{-am})x + (\boxed{a})y = 1 \cdots \cdots \cdots \textcircled{2}$$

(3) ① - ②:

$$\boxed{x^2 + y^2 + amx - ay = 0} \cdots \cdots \cdots \textcircled{3}$$

が求める円 D の式であることが, 次の A), B) によって確かめられる.

A) ③の表す図形は Q, R, O を通る

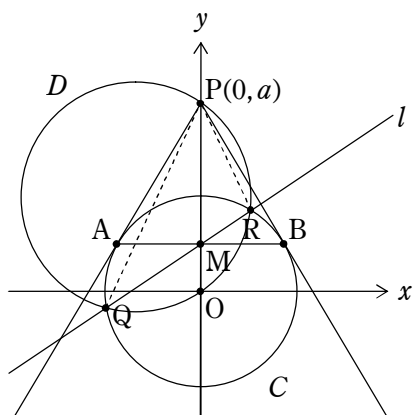
Q, R の座標は①, ②をとともに満たすので, ③も満たす. つまり, ③の表す図形は Q, R を通る. また, $(x, y) = (0, 0)$ も③を満たすので, ③の表す図形は原点 O も通る. よって, ③は Q, R, O を通る図形を表す.

B) ③の表す図形は円である

式の形から，③の表す図形は円，1 点，空集合のいずれかであり，すでに同一直線上にない3点 Q, R, O を含むことが分かっているので，円であると言える．

※ 平方完成して円を表していることを確かめてもよい．

- (4) $(x, y) = (0, a)$ は③を満たすので， D は P を通る．



$OQ = OR$ (円 C の半径) であるから，円 D において $\widehat{OQ} = \widehat{OR}$ となり，円周角の定理より，

$$\angle OPQ = \angle OPR$$

$$\therefore \angle MPQ = \angle MPR$$

である．