

中3数学D 3学期 宿題解答 §3 数学的帰納法(1)

宿題 3-1

(1)

$$1! = 1 = \boxed{1}$$

$$1 \times 1! = \boxed{1}$$

$$2! = 1 \times 2 = \boxed{2}$$

$$1 \times 1! + 2 \times 2! = \boxed{5}$$

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = \boxed{6}$$

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! = \boxed{23}$$

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = \boxed{24}$$

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + 4 \times 4! = \boxed{119}$$

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = \boxed{120}$$

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + 4 \times 4! + 5 \times 5! = \boxed{719}$$

(2) $1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! = \boxed{(n+1)! - 1}$ と予想できる.

(3) すべての自然数 n に対して,

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! = (n+1)! - 1 \cdots \cdots \star$$

が成り立つことを, 数学的帰納法で証明する. 次の I), II) の主張を証明すればよい.

I) $n = k$ のときの与式

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + k \times k! = (k+1)! - 1 \cdots \cdots [k]$$

を仮定すれば, $n = k+1$ のときの与式

$$1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + k \times k! + (k+1) \times (k+1)! = (k+2)! - 1 \cdots \cdots [k+1]$$

を導ける.

[証明]

$[k+1]$ の左辺

$$= \underbrace{1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + k \times k!}_{[k] \text{ の左辺}} + (k+1) \times (k+1)!$$

$$= \underbrace{(k+1)! - 1}_{[k] \text{ の右辺}} + (k+1) \times (k+1)! \quad (\text{帰納法の仮定}[k] \text{ より})$$

$$= (1 + (k+1)) \times (k+1)! - 1 = (k+2)! - 1 = [k+1] \text{ の右辺}$$

よって, $[k+1]$ が成り立つ.

II) $n = 1$ のときの与式

$$1 \times 1! = (1+1)! - 1 \cdots \cdots [1]$$

が成り立つ.

[証明]

$[1]$ の左辺は, $1 \times 1! = 1$

$[1]$ の右辺は, $(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1$

確かに等しいので, $[1]$ が成り立つ.

I), II) より, すべての自然数 n に対して, $\star$ が成り立つことが証明された.

宿題 3-2

- (1) p_1 は 1 回目に表が出る確率で, $p_1 = \boxed{\frac{1}{3}}$.
 p_2 は 1 回目に裏, 2 回目に表が出る確率で, $p_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{9}}$.
 p_3 は 1 回目, 2 回目に裏, 3 回目に表が出る確率で, $p_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{4}{27}}$.

- (2) p_n は 1 回目から $n-1$ 回目まで裏が出続け, n 回目に表が出る確率で,

$$p_n = \underbrace{\frac{2}{3} \cdots \frac{2}{3}}_{n-1 \text{ 回}} \cdot \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}}$$

- (3) (2) より,

$$\begin{aligned} Q_n &= p_1 + p_3 + p_5 + \cdots + p_{2n-1} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^4 + \cdots + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^{2n-2} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9} \right)^2 + \cdots + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

は初項 $\frac{1}{3}$, 公比 $\frac{4}{9}$ の等比数列の初項から第 n 項までの和であるから,

$$\begin{aligned} Q_n - \frac{4}{9} Q_n &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9} \right)^n \\ \frac{5}{9} Q_n &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{4}{9} \right)^n \\ \therefore Q_n &= \boxed{\frac{3}{5} - \frac{3}{5} \left(\frac{4}{9} \right)^n} \end{aligned}$$

- (4) n が大きくなっていくと, $\left(\frac{4}{9} \right)^n$ は限りなく 0 に近づいていくので, Q_n は限りなく $Q = \boxed{\frac{3}{5}}$ に近づいていく.

宿題 3-3

- (1) $x^2 + 5y^2 + 5 \geq 4xy + 2x$
 を示すには, (左辺) - (右辺) の最小値が 0 以上であることを示せばよい.

(左辺) - (右辺)

$$\begin{aligned} &= x^2 + 5y^2 + 5 - 4xy - 2x \\ &= x^2 - (4y + 2)x + 5y^2 + 5 \\ &= (x - (2y + 1))^2 - (2y + 1)^2 + 5y^2 + 5 \\ &= (x - (2y + 1))^2 + y^2 - 4y + 4 \\ &= \underbrace{(x - (2y + 1))^2}_{0 \text{ 以上}} + \underbrace{(y - 2)^2}_{0 \text{ 以上}} \geq 0 \end{aligned}$$

なので, (左辺) $\geq$ (右辺) が成り立つ.

また, 等号成立は

$$\begin{cases} x - (2y + 1) = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \end{cases}$$

のとき.

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{6}$$

を示すには、左辺の最小値が $\frac{1}{6}$ 以上であることを示せばよい。

$x + y + 2z = 1 \quad \therefore x = 1 - (y + 2z)$
 なので、これを代入して計算すると、

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 \\ &= (1 - (y + 2z))^2 + y^2 + z^2 \\ &= 2y^2 + 4yz + 5z^2 - 2y - 4z + 1 \\ &= 2(y^2 + (2z - 1)y) + 5z^2 - 4z + 1 \\ &= 2\left(\left(y + z - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(z - \frac{1}{2}\right)^2\right) \\ &\quad + 5z^2 - 4z + 1 \\ &= 2\left(y + z - \frac{1}{2}\right)^2 \\ &\quad - 2\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + 5z^2 - 4z + 1 \\ &= 2\left(y + z - \frac{1}{2}\right)^2 + 3z^2 - 2z + \frac{1}{2} \\ &= 2\underbrace{\left(y + z - \frac{1}{2}\right)^2}_{0 \text{以上}} + 3\underbrace{\left(z - \frac{1}{3}\right)^2}_{0 \text{以上}} + \frac{1}{6} \geq \frac{1}{6} \end{aligned}$$

なので、 $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{6}$ が成り立つ。

また、等号成立は

$$\begin{cases} y + z - \frac{1}{2} = 0 \\ z - \frac{1}{3} = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} y = \frac{1}{6} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$$

のときであり、このとき

$$x = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

であるから、 $(x, y, z) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$ のとき。

※ コーシー・シュワルツの不等式より

$(1^2 + 1^2 + 2^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + 2z)^2$
 が成り立つことを利用してもよい。

宿題 3-4

(1) [方針 I] D の中心の座標を求める

円 D の中心は AC の垂直二等分線 l と、
 BC の垂直二等分線 m の交点である。

AC の傾きは -1 なので l の傾きは 1 であ

り、 l は AC の中点 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ を通るので、 l

の式は

$$y = 1\left(x - \frac{3}{2}\right) + \frac{5}{2} \quad \therefore y = x + 1$$

BC の傾きは 2 なので m の傾きは $-\frac{1}{2}$ で

あり、 m は BC の中点 $\left(-\frac{1}{2}, 6\right)$ を通るので、 m の式は

$$y = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) + 6 \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{23}{4}$$

したがって、 l と m の交点の座標は

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{23}{4} \end{cases}$$

を解いて、 $\left(\frac{19}{6}, \frac{25}{6}\right)$ と求まる。

中心 $\left(\frac{19}{6}, \frac{25}{6}\right)$ で $A(4, 0)$ を通る円なので、

D の式は

$$\left(x - \frac{19}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{25}{6}\right)^2 = \left(4 - \frac{19}{6}\right)^2 + \left(-\frac{25}{6}\right)^2$$

$$\therefore \boxed{x^2 + y^2 - \frac{19}{3}x - \frac{25}{3}y + \frac{28}{3} = 0} \dots\dots\dots ①$$

である。

[方針Ⅱ] D の式をおく.

D の式を

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

とおくと, D は $A(4, 0)$, $B(0, 7)$, $C(-1, 5)$ を通るので,

$$\begin{cases} 16 + 0 + 4a + 0 + c = 0 \\ 0 + 49 + 0 + 7b + c = 0 \\ 1 + 25 - a + 5b + c = 0 \end{cases}$$

が成り立つ. これを解くと

$$a = -\frac{19}{3}, b = -\frac{25}{3}, c = \frac{28}{3}$$

であるから (略), D の式は

$$x^2 + y^2 - \frac{19}{3}x - \frac{25}{3}y + \frac{28}{3} = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である.

(2) P, Q, R の座標が①式を満たすか調べればよい.

$(x, y) = (5, 8)$ のとき, ①の左辺は

$$25 + 64 - \frac{95}{3} - \frac{200}{3} + \frac{28}{3} = 89 - \frac{267}{3} = 0$$

なので, P の座標は①を満たす.

よって, P は D 上にある.

$(x, y) = (6, 7)$ のとき, ①の左辺は

$$36 + 49 - 38 - \frac{175}{3} + \frac{28}{3} = 47 - \frac{147}{3} = -2$$

なので, Q の座標は①を満たさない.

よって, Q は D 上にない.

$(x, y) = (7, 6)$ のとき, ①の左辺は

$$49 + 36 - \frac{133}{3} - 50 + \frac{28}{3} = 35 - \frac{105}{3} = 0$$

なので, R の座標は①を満たす.

よって, R は D 上にある.

以上より, D 上にあるのは $\boxed{P, R}$.

(3) 線分 AC (あるいは PR) の垂直二等分線である $y = x + 1$ に関して円 D が線対称であることに注目すると, B の対称点である $\boxed{(6, 1)}$ も円 D 上にあることが分かる.