

中3数学D 3学期 宿題解答 §4 数学的帰納法(2)

宿題 4-1

- (1) 「 $\boxed{5}$ 以上のすべての自然数 n に対して、 $2^n > n^2$ が成立する」
ことを数学的帰納法で証明する。次の I), II) の主張を証明すればよい。

- I) 5 以上の自然数 k に対して、 $n=k$ のときの不等式 $2^k > k^2$ を仮定すれば、 $n=k+1$ のときの不等式 $2^{k+1} > (k+1)^2$ を導ける。

[証明]

帰納法の仮定より、 $2^k > k^2$ であるから、

$$\begin{aligned} 2^{k+1} - (k+1)^2 &= 2 \cdot 2^k - (k+1)^2 \\ &> 2 \cdot k^2 - (k+1)^2 \\ &= k^2 - 2k - 1 \\ &= (k-1)^2 - 2 \end{aligned}$$

いま、 k は 5 以上の自然数であるから、 $k-1 \geq 4 \quad \therefore (k-1)^2 \geq 4^2$ であるから、
 $\geq 4^2 - 2 = 14$
 > 0

したがって、 $2^{k+1} - (k+1)^2 > 0 \quad \therefore 2^{k+1} > (k+1)^2$ が成り立つ。

- II) $n=5$ のときの不等式 $2^5 > 5^2$ が成り立つ。

[証明]

$$2^5 = 32 > 25 = 5^2$$

なので、確かに成り立つ。

I), II) より、証明された。

- (2) $n=1, 2, 3, 4$ に対しては、

n	1	2	3	4
2^n	2	4	8	16
n^2	1	4	9	16

であり、5 以上の自然数 n に対しては、(1) より $2^n > n^2$ であるから、 $2^n = n^2$ を満たす自然数 n は $n = \boxed{2, 4}$ 。

宿題 4-2

$$S_n = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 + \cdots + n \cdot 5^{n-1}$$

$$5S_n = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + \cdots + (n-1) \cdot 5^{n-1} + n \cdot 5^n$$

なので、2 式の差を取ると、

$$-4S_n = \underbrace{1 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + \cdots + 1 \cdot 5^{n-1}}_{T_n} - n \cdot 5^n$$

ここで、 T_n は、初項 1、公比 5 の等比数列の和なので、2-1 と同様にして

$$T_n = \frac{5^n - 1}{4}$$

となる。

よって、

$$-4S_n = \frac{5^n - 1}{4} - n \cdot 5^n$$

$$4S_n = -\frac{5^n - 1}{4} + n \cdot 5^n = \frac{(4n-1) \cdot 5^n + 1}{4}$$

$$\therefore S_n = \frac{(4n-1) \cdot 5^n + 1}{16}$$

※ 結果の式に $n=1$ を代入すると、

$$\frac{3 \cdot 5 + 1}{16} = 1$$

であり、これは

$$S_1 = 1 \cdot 1 = 1$$

と一致している。

このような検算は易しいので、必ず確認しておくようにしましょう。

宿題 4-3

(1) $x > 0$ なので、相加・相乗平均の不等式より、

$$f(x) = x + \frac{2}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore f(x) \geq 2\sqrt{2}$$

が成り立つ。この不等式は、

$$x = \frac{2}{x} \quad x^2 = 2 \quad \therefore x = \sqrt{2} \quad (> 0)$$

のとき等号成立し、このとき $f(x)$ は最小

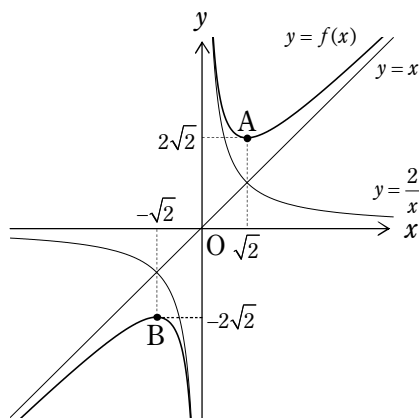
値 $2\sqrt{2}$ をとる。

※ $y=x, y=\frac{2}{x}$ のグラフより、 $y=f(x)$ のグ

ラフは下図の太線部分のような形になり、

(1)より、点 A の座標は $(\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ である。

さらに、 $y=f(x)$ のグラフは原点对称であるから、点 B は A と原点对称であり、座標は $(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ となる。



(2) $x-2 > 0$ なので、相加・相乗平均の不等式より、

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{2}{x-2} \\ &= x-2 + \frac{2}{x-2} + 2 \cdots \cdots \star \\ &\geq 2\sqrt{(x-2) \cdot \frac{2}{x-2}} + 2 = 2\sqrt{2} + 2 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) \geq 2\sqrt{2} + 2$$

が成り立つ。

$$x-2=\frac{2}{x-2} \quad (x-2)^2=2$$

$$\therefore \boxed{x = 2 + \sqrt{2}} \quad (> 2)$$

のとき等号成立し, このとき $f(x)$ は最小値 $\boxed{2\sqrt{2}+2}$ をとる.

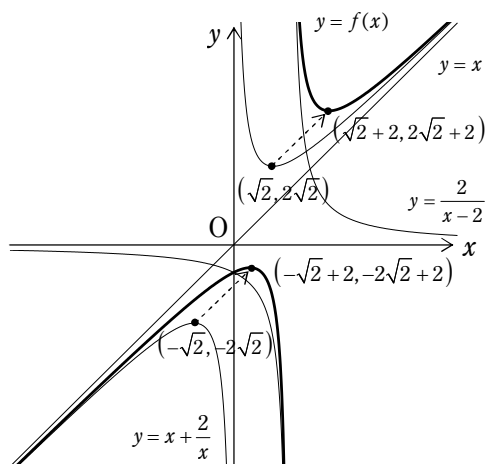
※ ☆に注目すると， $y = f(x)$ のグラフは

$$y = g(x) = x - 2 + \frac{2}{x - 2}$$

のグラフを、 y 軸方向に 2 平行移動したものであり、 $y = g(x)$ のグラフは、

$$y = x + \frac{2}{x}$$

のグラフを x 軸方向に 2 平行移動したものである。つまり、 $y = f(x)$ のグラフは、
 (1) のグラフを x 軸方向に 2、 y 軸方向に 2 平行移動したものである。



※ ☆の式変形は，単に相加・相乗平均の不等式を適用できるようにするためのものというだけでなく，このような様子を読み取るための変形にもなっていることに注意しておこう．

宿題 4-4

$x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 0$ の解が α, β, γ なので、方程式の左辺は

$$x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \cdots \textcircled{1}$$

と因数分解される.

(1) ①の両辺を比較すると,

x^2 の係数より, $2 = -\alpha - \beta - \gamma$

x の係数より, $-3 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$

定数項より, $-1 = -\alpha\beta\gamma$

を得る. よって,

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = \boxed{-2} \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \boxed{-3} \\ \alpha\beta\gamma = \boxed{1} \end{cases}$$

(解と係数の関係)

これを利用して計算すると,

$$(2) \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-3}{1} = \boxed{-3}$$

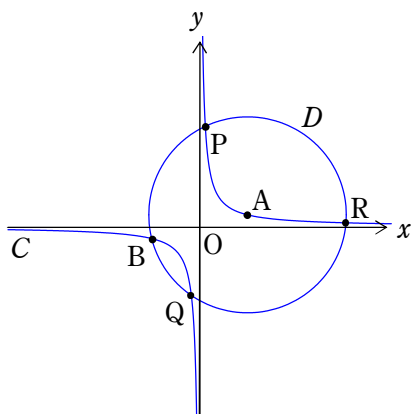
$$\begin{aligned} (3) \quad & \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) \\ &= (-2)^2 - 2 \times (-3) = \boxed{10} \end{aligned}$$

(4) $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$ は①の右辺に $x=2$ を代入したものであるから、

$$\begin{aligned} & (2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma) \\ &= 2^3 + 2 \times 2^2 - 3 \times 2 - 1 = \boxed{9} \end{aligned}$$

※ $(2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$ を展開して考えてもよい.

チャレンジおまけ宿題 4-A



- (1) $A\left(2, \frac{1}{2}\right)$ を中心として, $B\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ を通る円 D の式は,

$$(x-2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = (-2-2)^2 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\therefore (x-2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 17$$

- (2) $C: y = \frac{1}{x}$, $D: (x-2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 17$ の交点 B, P, Q, R の x 座標は

$$(x-2)^2 + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)^2 = 17$$

$$x^2 - 4x - \frac{51}{4} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\therefore x^4 - 4x^3 - \frac{51}{4}x^2 - x + 1 = 0 \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

の 4 解である.

- (3) ①の解の 1 つは, B の x 座標の -2 であるから, ①の左辺は $x+2$ で割り切れて,

$$(x+2)\left(x^3 - 6x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

となる.

したがって, P, Q, R の x 座標は, ①の -2 以外の 3 解であるから, 3 次方程式

$$x^3 - 6x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = 0 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

の 3 解である.

- (4) P, Q, R の x 座標を p, q, r とすると,

$$P\left(p, \frac{1}{p}\right), Q\left(q, \frac{1}{q}\right), R\left(r, \frac{1}{r}\right)$$

であり, 三角形 PQR の重心 G の座標は

$$\left(\frac{p+q+r}{3}, \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right)\right)$$

一方, p, q, r は 3 次方程式②の 3 解なので, 解と係数の関係より,

$$\begin{cases} p+q+r=6 \\ pq+pr+qr=-\frac{3}{4} \\ pqr=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

であるから,

$$\frac{p+q+r}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{qr+pr+pq}{pqr}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

よって, $G\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

- (5) (4)より, 三角形 PQR の重心 G は, A と一致しているので, 三角形 PQR の外心でもある. したがって, G は QR の垂直二等分線上の点なので, QR の中点を M とすると, GM は QR の垂直二等分線となる. 一方, G は重心なので, 中線 PM 上の点であるから, P, G, M は同一直線上であり, QR の垂直二等分線 GM は P を通る. よって, $PQ=PR$ である.

同様に, $QP=QR$ も言えるので,

$$PQ=QR=RP$$

となり, 三角形 PQR は 正三角形.