中3数学D 3学期 宿題解答 §5 漸化式と数え上げ(1)

宿題 5-1

(1) $n=1$ のとき，条件を満たすのは

○

であるから，$a_1=\boxed{1}$.

$n=2$ のとき，条件を満たすのは

○×　×○

○△　△○

であるから，$a_2=\boxed{4}$

$n=3$ のとき，条件を満たすのは

○××　×○×　△○×

○×△　×○△　△○△

○△×　××○　△×○

○△△　×△○　△△○

○○○

であるから，$a_3=\boxed{13}$

(2) ○，×，△を合わせて $n+1$ 個並べた記号列であって，○を奇数個含むもののうち，

A) 左端が○であるものは，残り n 文字のなかに○を偶数個含む

B) 左端が×であるものは，残り n 文字のなかに○を奇数個含む

C) 左端が△であるものは，残り n 文字のなかに○を奇数個含む

である．

B)の形のものと C)の形のものは，それぞれ a_n 個ずつある．

A)の形ものは，○，×，△を合わせて n 個を並べたの記号列であって，○を偶数個含むものの個数だけある．n 個を並べた記号列は全部で 3^n 個あり，そのうち○を奇数個含むものが a_n 個であるから，偶数個含むものは 3^n-a_n 個.

したがって，

$$a_{n+1}=a_n+a_n+(3^n-a_n)=a_n+3^n$$

$\therefore\ \boxed{a_{n+1}=a_n+3^n}\ (n=1,2,3,\cdots)$

が成り立つ.

(3) 漸化式を利用して，順番に計算すれば

$$a_4=a_3+3^3=13+27=40$$

$$a_5=a_4+3^4=40+81=121$$

$$a_6=a_5+3^5=121+243=\boxed{364}$$

(4) 漸化式より，

$$a_1=1$$

$$a_2=1+3$$

$$a_3=1+3+3^2$$

$$\cdots$$

$$a_n=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}$$

$$=\frac{3^n-1}{3-1}=\boxed{\frac{3^n-1}{2}}$$

宿題 5-2

$a_n=\boxed{5^{n-1}}\ (n=1,2,3,\cdots)$ ……………………… ☆

となることを数学的帰納法で証明する.

次の I), II)の主張を証明すればよい.

I) $n=k$ のときの☆である $a_k=5^{k-1}$

$n=k+1$ のときの☆である $a_{k+1}=5^k$

を共に仮定すれば，

$n=k+2$ のときの☆である $a_{k+2}=5^{k+1}$

を導ける.

［このことの証明］

$$a_{k+2}=3a_{k+1}+10a_k$$

$=3\cdot5^k+10\cdot5^{k-1}$ （帰納法の仮定より）

$$=3\cdot5^k+2\cdot5^k$$

$$=5\cdot5^k=5^{k+1}$$

なので，$n=k+2$ のときの☆を得られる.

II) $n=1, n=2$ のときの☆が成立する.

［このことの証明］

$$a_1=1=5^0$$

$$a_2=5=5^1$$

なので，$n=1, n=2$ のときの☆は成立する.

I), II)より，すべての自然数 n について，☆が証明された.

宿題 5-3

(1) $\quad |-x^2+1| \leqq x+1$

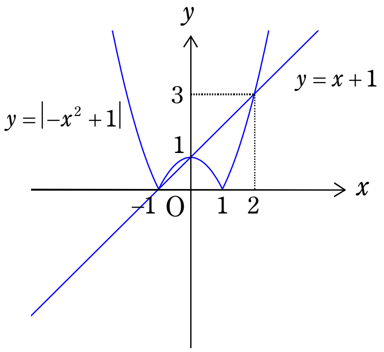
の解は，

$y=|-x^2+1|$ のグラフが，

$y=x+1$ のグラフより下側にある

（一致している部分も含む）

ような部分の x 座標の範囲なので，下のグラフより，$\boxed{x=-1,\ 0 \leqq x \leqq 2}$．



※ 交点 $(2,3)$ の座標は，$y=x^2-1$ のグラフと $y=x+1$ のグラフの交点として計算できる．

(2) $\quad \dfrac{1}{x} \leqq x$

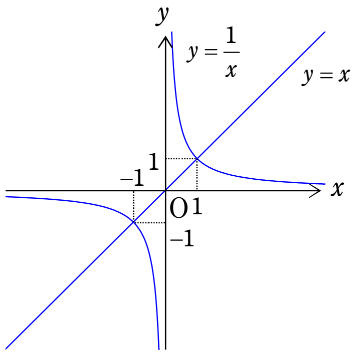
の解は，

$y=\dfrac{1}{x}$ のグラフが，

$y=x$ のグラフより下側にある

（一致している部分も含む）

ような部分の x 座標の範囲なので，下のグラフより，$\boxed{-1 \leqq x < 0,\ 1 \leqq x}$．



(3) $\quad x-2 \leqq \sqrt{x}$

の解は，

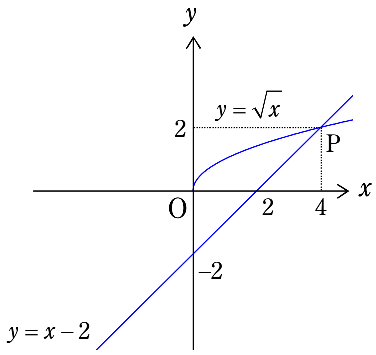
$y=x-2$ のグラフが，

$y=\sqrt{x}$ のグラフより下側にある

（一致している部分も含む）

ような部分の x 座標の範囲なので，下のグラフより，

$\boxed{0 \leqq x \leqq 4}$



※ 交点 $P(4,2)$ は，$y=x-2$ と $y=\sqrt{x}$ のグラフの交点であるから，P の x 座標は方程式

$x-2=\sqrt{x}$

を満たす．

したがって，両辺を 2 乗した

$(x-2)^2=x$

も満たしているので，これを解いた

$x^2-5x+4=0$

$\therefore x=1,4$

の中に P の x 座標は含まれている．

図に適するものを考えれば，P の x 座標は 4 であると分かり，$P(4,2)$ と求まる．

※ グラフの様子で交わり方が分かっている場合，適当に代入して交点の座標を見つけられれば方程式を解くまでもありません．この宿題の交点くらいであれば，座標を見抜けてもよいでしょう．

チャレンジおまけ宿題 5-A

(1) $\mathrm{A}(a,a^2)$, $\mathrm{B}(b,b^2)$ であるから，

$$\begin{aligned} d^2 &= (a-b)^2+(a^2-b^2)^2 \\ &= (a-b)^2+(a-b)^2(a+b)^2 \\ &= (a-b)^2(1+(a+b)^2) \end{aligned}$$

$$\therefore d = \boxed{\sqrt{(a-b)^2(a^2+2ab+b^2+1)}} \cdots\cdots ①$$

(2) $(a-b)^2$, $a^2+2ab+b^2+1=(a+b)^2+1$

は正の数なので，相加・相乗平均の不等式より，

$$d \leqq \frac{(a-b)^2+a^2+2ab+b^2+1}{2}$$

$$\therefore d \leqq \boxed{1}(a^2+b^2)+\boxed{\frac{1}{2}} \cdots\cdots ②$$

が成り立つ.

等号成立は

$$(a-b)^2=a^2+2ab+b^2+1$$

$$\therefore \boxed{ab=-\frac{1}{4}}$$

のとき.

(3) A, B の中点 M の y 座標を m とすると，

$$m=\frac{a^2+b^2}{2}$$

であるから，②より

$$d \leqq 2m+\frac{1}{2}$$

が成り立つ.

いま，$d=2$ であるから

$$2 \leqq 2m+\frac{1}{2} \qquad \therefore \frac{3}{4} \leqq m \cdots\cdots ③$$

したがって，③が等号成立するなら，そのとき m は最小値である.

③が等号成立するのは，②が等号成立するときであり，$ab=-\dfrac{1}{4}$ のときなので，

$$\begin{cases} ab=-\dfrac{1}{4} \\ d=2 \end{cases}$$

を満たす a,b が（あるなら，それが）③の等号が成立する a,b である.

①より，$d=2$ は

$$2=\sqrt{(a^2-2ab+b^2)(a^2+2ab+b^2+1)}$$

なので，

$$ab=-\frac{1}{4} \cdots\cdots ④$$

を代入すると

$$2=\sqrt{\left(a^2+b^2+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$a^2+b^2+\dfrac{1}{2}>0$ なので，

$$2=a^2+b^2+\frac{1}{2} \qquad \therefore a^2+b^2=\frac{3}{2} \cdots\cdots ⑤$$

⑤$+2\times$④ より

$$a^2+2ab+b^2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}$$

$$(a+b)^2=1$$

$$\therefore a+b=1,-1 \cdots\cdots ⑥$$

⑤$-2\times$④ より

$$a^2-2ab+b^2=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$$

$$(a-b)^2=2$$

$a<b \quad \therefore a-b<0$ なので，

$$\therefore a-b=-\sqrt{2} \cdots\cdots ⑦$$

よって，⑥, ⑦を満たす

$$\boxed{(a,b)=\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2},\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{-1-\sqrt{2}}{2},\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)}$$

のときに③は等号成立して，このとき m は最小値

$$\boxed{\frac{3}{4}}$$

をとる.