中3数学D　3学期　宿題解答　§6　数列の和と数え上げ

宿題 6-1

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k(k+1)$

$=1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+5\times6$

$=\boxed{70}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} k\cdot2^k = 1\cdot2^1+2\cdot2^2+3\cdot2^3=\boxed{34}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} (k-1)^k = 0^1+1^2+2^3+3^4=\boxed{90}$

宿題 6-2

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{24} k^2 = \frac{1}{6}\cdot24\cdot(24+1)\cdot(2\cdot24+1)=\boxed{4900}$

※　余談であるが，2 乗和

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$（四角錐数）

が平方数（四角数）になるのは，$n=1, 24$ のときのみであることが知られている（リュカのキャノンボール問題）.

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^3-k)=\sum_{k=1}^{n}k^3-\sum_{k=1}^{n}k$

$\displaystyle=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-\frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle=\frac{1}{4}n(n+1)\{n(n+1)-2\}$

$\displaystyle=\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n-2)$

$\displaystyle=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n-1)$

$\displaystyle=\boxed{\frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2)}$

※　練習 6-2a (1)の考え方を使って，

$$\sum_{k=1}^{n}(k^3-k)=\sum_{k=2}^{n}(k^3-k)$$

$$=\sum_{k=2}^{n}(k-1)k(k+1)$$

$$=6\cdot\sum_{k=2}^{n}{}_{k+1}\mathrm{C}_3=6\cdot{}_{n+2}\mathrm{C}_4$$

とすることもできる.

宿題 6-3

(1) $(k,0),(k,1),\cdots,(k,k^2)$ の $\boxed{k^2+1}$ 個.

(2) D に含まれる格子点は，x 座標が 0 のものから n のものまであり，(1)より，x 座標 $0,1,2,\cdots,n$ のものが，それぞれ

$0^2+1, 1^2+1, 2^2+1,\cdots,n^2+1$

個ずつあるので，その総数 N は

$$N=\sum_{k=0}^{n}(k^2+1)$$

と表せる．これを計算して，

$$N=\sum_{k=0}^{n}(k^2+1)=\sum_{k=0}^{n}k^2+\sum_{k=0}^{n}1$$

$$=(0^2+\underline{1^2+2^2+\cdots+n^2})+(n+1)$$

$$=\underline{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}+(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)\big(n(2n+1)+6\big)$$

$$=\boxed{\frac{1}{6}(n+1)(2n^2+n+6)}$$

宿題 6-4

$k=0,1,2,\cdots,n$ に対して，(x,y,z) のうち $z=k$ となるものは

$x+y+2k=2n \quad \therefore x+y=2n-2k$

を満たす (x,y) の数だけあり，このような (x,y) は

$(0,2n-2k), (1,2n-2k-1), \cdots, (2n-2k,0)$

の $2n-2k+1$ 個．したがって，求める (x,y,z) の個数 a_n は

$z=0$ のもの　$2n+1$ 個
$z=1$ のもの　$2n-1$ 個
$z=2$ のもの　$2n-3$ 個
…
$z=n$ のもの　1 個

の計 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(2n-2k+1)$ 個と表せる.

これは等差数列の和であるから，

$$a_n=\frac{(2n+1+1)\cdot(n+1)}{2}=\boxed{(n+1)^2}.$$