－ 中 3Z　宿題プリント (3 学期-3)　解答 －

宿題 3-1

(1) $f(x)=x^3-5x^2-2x+24$ とおく。
$f(-2)=-8-20+4+24=0$ なので、因数定理より、
$f(x)$ は $x+2$ で割り切れる。

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & x^2 & -7x & +12 & \\ \cline{2-5}
x+2 \big) & x^3 & -5x^2 & -2x & +24 \\
 & x^3 & +2x^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & -7x^2 & -2x & \\
 & & -7x^2 & -14x & \\ \cline{3-5}
 & & & 12x & +24 \\
 & & & 12x & +24 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

上の計算より、
$f(x)=(x+2)(x^2-7x+12)$
$\quad=(x+2)(x-3)(x-4)$ と表せる。
よって、3 次方程式 $f(x)=0$ の解は、$\boxed{x=-2,3,4}$

(2) $f(x)=x^3-4x^2-6x+5$ とおく。
$f(5)=\underbrace{5^3-4\cdot5^2}_{(5-4)5^2}-6\cdot5+5=25-30+5=0$ なので、因数定理より、$f(x)$ は $x-5$ で割り切れる。

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & x^2 & +x & -1 & \\ \cline{2-5}
x-5 \big) & x^3 & -4x^2 & -6x & +5 \\
 & x^3 & -5x^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & x^2 & -6x & \\
 & & x^2 & -5x & \\ \cline{3-5}
 & & & -x & +5 \\
 & & & -x & +5 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

上の計算より、$f(x)=(x-5)(x^2+x-1)$ と表せるので、$f(x)=0$ となるのは
$x-5=0$ または $x^2+x-1=0$ のとき。

$x^2+x-1=0$ となる x の値は
$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$
よって、3 次方程式 $f(x)=0$ の解は、

$\boxed{x=5,\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

(3) $f(x)=x^4-4x^2-x+2$ とおく。
$f(-1)=1-4+1+2=0$ なので、因数定理より、
$f(x)$ は $x+1$ で割り切れる。

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & x^3 & -x^2 & -3x & +2 & \\ \cline{2-6}
x+1 \big) & x^4 & & -4x^2 & -x & +2 \\
 & x^4 & +x^3 & & & \\ \cline{2-6}
 & & -x^3 & -4x^2 & & \\
 & & -x^3 & -x^2 & & \\ \cline{3-6}
 & & & -3x^2 & -x & \\
 & & & -3x^2 & -3x & \\ \cline{4-6}
 & & & & 2x & +2 \\
 & & & & 2x & +2 \\ \cline{5-6}
 & & & & & 0
\end{array}
$$

上の計算より、$f(x)=(x+1)(x^3-x^2-3x+2)$ と表せる。

ここで、$g(x)=x^3-x^2-3x+2$ とおくと、
$g(2)=8-4-6+2=0$ なので、因数定理より、
$g(x)$ は $x-2$ で割り切れる。

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & x^2 & +x & -1 & \\ \cline{2-5}
x-2 \big) & x^3 & -x^2 & -3x & +2 \\
 & x^3 & -2x^2 & & \\ \cline{2-5}
 & & x^2 & -3x & \\
 & & x^2 & -2x & \\ \cline{3-5}
 & & & -x & +2 \\
 & & & -x & +2 \\ \cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

上の計算より、$g(x)=(x-2)(x^2+x-1)$ と表せる。

以上より、$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2+x-1)$ と表せるので、4 次方程式 $f(x)=0$ の解は、

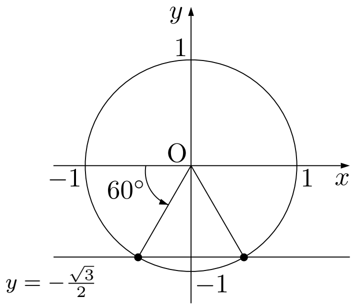
$\boxed{x=-1,2,\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

＜補足＞ $x^2+x-1=0$ となる x の値は、(2) で計算してある。

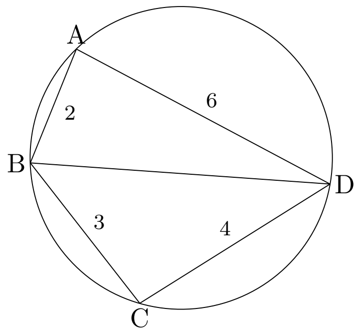
宿題 3-2

(1) 下図より、$\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる角は、

$\boxed{\theta = 240^\circ,\ 300^\circ}$



(2)



(ア) $\triangle$ABD, $\triangle$BCD で余弦定理を用いると

$\mathrm{BD}^2 = 2^2 + 6^2 - 2\cdot 2\cdot 6\cos A\ \cdots$ ①

$\mathrm{BD}^2 = 3^2 + 4^2 - 2\cdot 3\cdot 4\cos C\ \cdots$ ②

が成立。

四角形 ABCD は円に内接しているので、$A + C = 180^\circ$ であり、$\cos C = -\cos A$ である。

これと ② より、

$\mathrm{BD}^2 = 25 + 24\cos A\ \cdots$ ②$'$

①, ②$'$ より

$40 - 24\cos A = 25 + 24\cos A$

$\cos A = \boxed{\dfrac{5}{16}}$

(イ) ②$'$ に (ア) の結果を代入して、

$\mathrm{BD}^2 = 25 + 24\cdot\dfrac{5}{16} = \dfrac{65}{2}$

$\mathrm{BD} = \dfrac{\sqrt{65}}{\sqrt{2}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{130}}{2}}$

(ウ) $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ に (ア) の結果を代入して、

$\sin^2 A = 1 - \left(\dfrac{5}{16}\right)^2 = \dfrac{231}{16^2}$

$0^\circ < A < 180^\circ$ なので $\sin A > 0$ であり、

$\sin A = \dfrac{\sqrt{231}}{16}$

$A + C = 180^\circ$ なので、$\sin C = \sin A$ である。

$$
\begin{aligned}
S &= \triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{BCD}\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cdot\sin A + \frac{1}{2}\mathrm{CB}\cdot\mathrm{CD}\cdot\sin C\\
&= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 6\cdot\sin A + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot\sin A\\
&= 12\sin A = 12\cdot\frac{\sqrt{231}}{16} = \boxed{\frac{3\sqrt{231}}{4}}
\end{aligned}
$$

宿題 3-3

$f(x)=-x^2+kx+k=-\left(x-\dfrac{k}{2}\right)^2+\dfrac{k^2}{4}+k$

より、$y=f(x)$ のグラフは上に凸な放物線で、頂点が

$\left(\dfrac{k}{2}, \dfrac{k^2}{4}+k\right)$ である。

(1) x がすべての実数を動くときの $y=f(x)$ の最大値は、

$\dfrac{k^2}{4}+k$ である。これが 1 となるのは、

$\dfrac{k^2}{4}+k=1$

$k^2+4k-4=0$

$(k+2)^2-2^2-4=0$

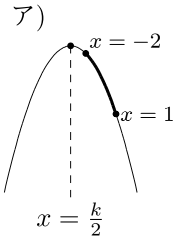
$(k+2)^2=8$

$k+2=\pm 2\sqrt{2}$

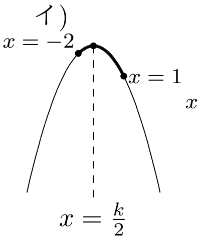
$\boxed{k=-2\pm 2\sqrt{2}}$

(2) $-2 \leqq x \leqq 1$ と頂点の x 座標 $\dfrac{k}{2}$ の位置関係で場合分けをする。

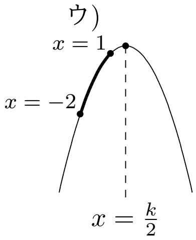
ア)



イ)



ウ)



ア) $\dfrac{k}{2} \leqq -2$ のとき　$(k \leqq -4$ のとき$)$

$x=-2$ で y は最大となり、最大値は

$y=-(-2)^2+k(-2)+k=-k-4$

イ) $-2 \leqq \dfrac{k}{2} \leqq 1$ のとき　$(-4 \leqq k \leqq 2$ のとき$)$

$x=\dfrac{k}{2}$ で y は最大となり、最大値は $y=\dfrac{k^2}{4}+k$

ウ) $\dfrac{k}{2} \geqq 1$ のとき　$(k \geqq 2$ のとき$)$

$x=1$ で y は最大となり、最大値は

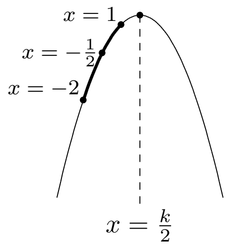
$y=-1^2+k+k=2k-1$

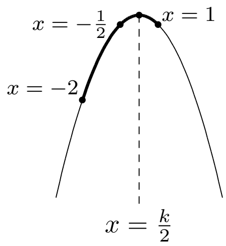
以上より、

$$\boxed{M=\begin{cases} -k-4 & \cdots k \leqq -4 \text{ のとき} \\ \dfrac{k^2}{4}+k & \cdots -4 \leqq k \leqq 2 \text{ のとき} \\ 2k-1 & \cdots k \geqq 2 \text{ のとき} \end{cases}}$$

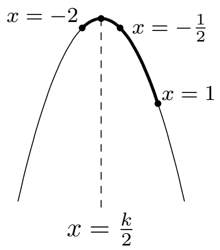
(3) $-2 \leqq x \leqq 1$ の中央である $x=-\dfrac{1}{2}$ と頂点の x 座標 $\dfrac{k}{2}$ の位置関係で場合分けをする。

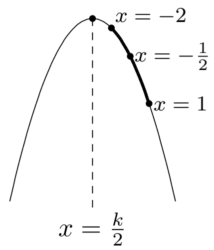
エ)





オ)





エ) $\dfrac{k}{2} \geqq -\dfrac{1}{2}$ のとき $(k \geqq -1$ のとき$)$

$x=-2$ で y は最小となり、最小値は $-k-4$

オ) $\dfrac{k}{2} \leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき $(k \leqq -1$ のとき$)$

$x=1$ で y は最小となり、最小値は $2k-1$

以上より、

$$\boxed{m=\begin{cases} -k-4 & \cdots k \geqq -1 \text{ のとき} \\ 2k-1 & \cdots k \leqq -1 \text{ のとき} \end{cases}}$$

宿題 3-4

$2x^2+3x-1=0$ の 2 解を α, β とおくと、
$2x^2+3x-1=2(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解できる。
右辺を展開すると

$$\begin{aligned} 2x^2+3x-1 &= 2\Big(x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\Big) \\ &= 2x^2-2(\alpha+\beta)x+2\alpha\beta \end{aligned}$$

となるので、1 次の係数、定数項を見比べて

$$\begin{cases} 3=-2(\alpha+\beta) \\ -1=2\alpha\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta = \boxed{-\dfrac{3}{2}} \cdots (1)\text{ の答} \\ \alpha\beta = \boxed{-\dfrac{1}{2}} \cdots (2)\text{ の答} \end{cases}$$

(3) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2-2\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$$= \boxed{\frac{13}{4}}$$

(4) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\beta\alpha}=\dfrac{\frac{13}{4}}{-\frac{1}{2}}=\boxed{-\dfrac{13}{2}}$